

Hội tụ theo trung bình đối với tổng có trọng số ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một

Mean Convergence of Random Weighted Sums of Pairwise Negative Quadrant Dependent Random Variables

Hồ Huỳnh Nguyên Bảo^a, Nguyễn Bảo Nhi^a, Phạm Văn Dực^{b*}
Ho Huynh Nguyen Bao^a, Nguyen Bao Nhi^a, Pham Van Duoc^{b*}

^aKhoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng, Đà Nẵng, Việt Nam

^a Faculty of Mathematics and Information Technology, University of Danang, University of Education and Science, Danang, 550000, Viet Nam

^bKhoa Khoa học Máy tính, Trường Khoa học Máy tính và Trí tuệ Nhân tạo, Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam

^b Faculty of Computer Sciences, School of Computer Science and Artificial Intelligence, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Viet Nam

(Ngày nhận bài: 16/07/2025, ngày phản biện xong: 07/01/2026, ngày chấp nhận đăng: 20/01/2026)

Tóm tắt

Các định lý giới hạn đối với tổng có trọng số các biến ngẫu nhiên phụ thuộc đã nhận được nhiều sự chú ý trong những năm gần đây vì tính hữu ích của nó. Trong bài báo này chúng tôi mở rộng kết quả của Sung sang trọng số ngẫu nhiên và áp dụng kết quả thu được vào bài toán ước lượng mô hình hồi quy phi tham số với thiết kế ngẫu nhiên.

Từ khóa: biến ngẫu nhiên, phụ thuộc âm, luật yếu số lớn, hội tụ theo trung bình

Abstract

Limit theorems for weighted sums of random variables have received considerable attention in recent years due to their usefulness. In this paper, we extend the result of Sung to the case of randomly weighted sums and apply the obtained result to estimators in nonparametric regression with random design.

Keywords: Random variables, negative quadrant dependence, weak laws of large numbers, convergence in mean

1. Giới thiệu

Các định lý giới hạn đối với tổng có trọng số các biến ngẫu nhiên phụ thuộc đã được nhiều tác giả nghiên cứu và có nhiều ứng dụng trong thống kê, mô hình toán kinh tế, phân tích hồi quy, phân tích hệ thống và lý thuyết điều khiển ngẫu nhiên. Gần đây, Sung [4] đã thu được kết quả sau.

*Tác giả liên hệ: Phạm Văn Dực
Email: duocduytan@gmail.com

Định lý A. Cho $\{X_{ni}, u_n \leq i \leq v_n, n \geq 1\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên NQD đôi một theo hàng và $1 \leq r < 2$. Cho $\{a_{ni}, u_n \leq i \leq v_n, n \geq 1\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên NQD đôi một theo hàng, độc lập với mảng $\{X_{ni}\}$. Giả sử rằng

- (i) $\sup_{n \geq 1} \sum_{i=u_n}^{v_n} |a_{ni}|^r E|X_{ni}|^r < +\infty$,
- (ii) $\sum_{i=u_n}^{v_n} |a_{ni}|^r E|X_{ni}|^r I(|a_{ni}|^r |X_{ni}|^r > \epsilon) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$ với mọi $\epsilon > 0$.

Khi đó

$$\sum_{i=u_n}^{v_n} a_{ni}(X_{ni} - EX_{ni}) \rightarrow 0$$

trong L^r và do đó hội tụ theo xác suất khi $n \rightarrow +\infty$.

Trong bài báo này chúng tôi mở rộng kết quả trên sang tổng có trọng số ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một và ứng dụng vào bài toán ước lượng mô hình hồi quy phi tham số với thiết kế ngẫu nhiên và sai số ngẫu nhiên là dãy biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một.

2. Kiến thức chuẩn bị

Định nghĩa 1. [1] Hai biến ngẫu nhiên X và Y được gọi là phụ thuộc âm (NQD) nếu

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x)P(Y \leq y) \text{ với mọi } x, y.$$

Bổ đề 1. [1] Cho X và Y là hai biến ngẫu nhiên NQD. Khi đó

- (i) $\text{cov}(X, Y) \leq 0$.

(ii) Nếu f và g là hai hàm số không giảm (hoặc không tăng) thì $f(X)$ và $g(Y)$ cũng là hai biến ngẫu nhiên NQD.

Từ (i) ta có ngay Bổ đề sau.

Bổ đề 2. [4] Cho $\{X_n; n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên NQD đôi một với kì vọng bằng 0 và phương sai hữu hạn. Khi đó

$$E\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right|^2\right) \leq \sum_{i=1}^n E(|X_i|^2).$$

Tương tự Bổ đề 1 của Chen và các cộng sự [1], ta có bổ đề sau.

Bổ đề 3. Cho $\{X_n; n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên NQD đôi một không âm và $\{Y_n; n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên NQD đôi một. Giả sử $\{X_n; n \geq 1\}$ và $\{Y_n; n \geq 1\}$ độc lập với nhau. Khi đó $\{X_n Y_n; n \geq 1\}$ cũng là dãy biến ngẫu nhiên NQD đôi một.

Chứng minh. Để chứng minh bổ đề này chúng tôi sử dụng kỹ thuật chứng minh của Chen và các cộng sự [1].

Với $t \geq 0, z \geq 0$ và $i \neq j$, ta có

$$\begin{aligned} P(X_i Y_i \leq t, X_j Y_j \leq z) &= \int \dots \int I(x_i y_i \leq t, x_j y_j \leq z) dF_{X_i, X_j, Y_i, Y_j}(x_i, x_j, y_i, y_j) \\ &= \int \dots \int I(x_i y_i \leq t, x_j y_j \leq z) dF_{X_i, X_j}(x_i, x_j) F_{Y_i, Y_j}(y_i, y_j) \\ &= \int \dots \int P(x_i Y_i \leq t, x_j Y_j \leq z) dF_{X_i, X_j}(x_i, x_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int \dots \int P(x_i Y_i \leq t) P(x_j Y_j \leq z) dF_{X_i, X_j}(x_i, x_j) \\
&\leq E \left(F_{Y_i}(t|X_i) F_{Y_j}(z|X_j) \right) \leq E \left(F_{Y_i}(t|X_i) \right) E \left(F_{Y_j}(z|X_j) \right) \\
&= \iint I(x_i y_i \leq t) dF_{Y_i}(y_i) dF_{X_i}(x_i) \iint I(x_j y_j \leq z) dF_{Y_j}(y_j) dF_{X_j}(x_j) \\
&= \iint I(x_i y_i \leq t) dF_{X_i, Y_i}(x_i, y_i) \iint I(x_j y_j \leq z) dF_{X_j, Y_j}(x_j, y_j) \\
&= P(X_i Y_i \leq t) P(X_j Y_j \leq z),
\end{aligned}$$

trong đó kí hiệu $F_Y(t|X)$ là hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên Y với điều kiện X .

Bổ đề được chứng minh.

Sau đây chúng tôi xét $\{u_n, n \geq 1\}$ và $\{v_n, n \geq 1\}$ là hai dãy các số nguyên (không nhất thiết phải là số dương) sao cho $v_n > u_n \forall n \geq 1$ và $v_n - u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Định nghĩa 2. Giả sử $\{X_{ni}, u_n \leq i \leq v_n, n \geq 1\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên và $\{A_{ni}, u_n \leq i \leq v_n, n \geq 1\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên với $\sum_{i=u_n}^{v_n} E|A_{ni}| \leq C$ với mọi $n \in N$ và một hằng số $C > 0$. Giả sử thêm rằng $\{h(n), n \geq 1\}$ là một dãy tăng của các hằng số dương sao cho $h(n) \uparrow \infty$ khi $n \uparrow \infty$. Mảng $\{X_{ni}, u_n \leq i \leq v_n, n \geq 1\}$ được gọi là *h-khả tích* đối với $\{A_{ni}\}$ nếu

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|A_{ni} X_{ni}| < +\infty \quad \text{và} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|A_{ni} X_{ni}| I(|X_{ni}| > h(n)) = 0.$$

Định nghĩa 3. Cho $\{k_n, n \geq 1\}$ là một dãy các số dương sao cho $k_n \rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$. Cho $\{X_{ni}, u_n \leq i \leq v_n, n \geq 1\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên và $r > 0$. Giả sử thêm rằng $\{h(n), n \geq 1\}$ là một dãy tăng của các hằng số dương sao cho $h(n) \uparrow \infty$ khi $n \uparrow \infty$. Mảng $\{X_{ni}\}$ được gọi là *h-khả tích với số mũ r* nếu

$$\sup_{n \geq 1} \frac{1}{k_n} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|X_{ni}|^r < +\infty \quad \text{và} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|X_{ni}|^r I(|X_{ni}|^r > h(n)) = 0.$$

3. Kết quả nghiên cứu

Định lý 1. Cho $\{X_{ni}, u_n \leq i \leq v_n, n \geq 1\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên NQD đôi một theo hàng và $1 \leq r < 2$. Cho $\{A_{ni}, u_n \leq i \leq v_n, n \geq 1\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên NQD đôi một theo hàng, độc lập với mảng $\{X_{ni}\}$. Giả sử rằng

- (i) $\sup_{n \geq 1} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|A_{ni} X_{ni}|^r < +\infty$,
- (ii) $\sum_{i=u_n}^{v_n} E|A_{ni} X_{ni}|^r I((E|A_{ni}|)^r |X_{ni}|^r > \epsilon) \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$ với mọi $\epsilon > 0$.

Khi đó

$$\sum_{i=u_n}^{v_n} A_{ni} (X_{ni} - EX_{ni}) \rightarrow 0$$

trong L^r và do đó hội tụ theo xác suất khi $n \rightarrow \infty$.

Chứng minh. Vì $A_{ni} = A_{ni}^+ - A_{ni}^-$ nên không mất tính tổng quát, ta giả sử $A_{ni} \geq 0$ hầu chắc chắn (h.c.c) với mọi i và n . Đặt $a_{ni} = EA_{ni}$, $k_n = 1 / \sup_{u_n \leq i \leq v_n} a_{ni}^r$. Với $u_n \leq i \leq v_n$ và $n \geq 1$, ta đặt

$$\begin{aligned}
Y_{ni} &= k_n^{1/r} A_{ni} X_{ni} I(k_n^{1/r} a_{ni} |X_{ni}| \leq t^{1/r}) \\
&+ t^{1/r} I(k_n^{1/r} a_{ni} X_{ni} > t^{1/r}) - t^{1/r} I(k_n^{1/r} a_{ni} X_{ni} < -t^{1/r}), \\
Z_{ni} &= (k_n^{1/r} A_{ni} X_{ni} - t^{1/r}) I(k_n^{1/r} a_{ni} X_{ni} > t^{1/r})
\end{aligned}$$

$$+ (k_n^{1/r} A_{ni} X_{ni} + t^{1/r}) I(k_n^{1/r} a_{ni} X_{ni} < -t^{1/r}).$$

Khi đó, $Y_{ni} + Z_{ni} = k_n^{1/r} A_{ni} X_{ni}$ và áp dụng Bổ đề 1 ta được $\{Y_{ni}, u_n \leq i \leq v_n, n \geq 1\}$ cùng với $\{Z_{ni}, u_n \leq i \leq v_n, n \geq 1\}$ là các mảng biến ngẫu nhiên NQD đôi một theo từng hàng. Với $\epsilon > 0$ bất kỳ, không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $0 < \epsilon < 1$. Khi đó

$$\begin{aligned} E \left| \sum_{i=u_n}^{v_n} A_{ni} (X_{ni} - EX_{ni}) \right|^r &= k_n^{-1} \int_0^\infty P \left(\left| \sum_{i=u_n}^{v_n} k_n^{1/r} A_{ni} (X_{ni} - EX_{ni}) \right|^r > t \right) dt \\ &\leq \epsilon + k_n^{-1} \int_{k_n \epsilon}^\infty P \left(\left| \sum_{i=u_n}^{v_n} k_n^{1/r} A_{ni} (X_{ni} - EX_{ni}) \right|^r > t \right) dt \\ &\leq \epsilon + k_n^{-1} \int_{k_n \epsilon}^\infty P \left(\left| \sum_{i=u_n}^{v_n} (Z_{ni} - EZ_{ni}) \right| > t^{1/r} / 2 \right) dt \\ &\quad + k_n^{-1} \int_{k_n \epsilon}^\infty P \left(\left| \sum_{i=u_n}^{v_n} (Y_{ni} - EY_{ni}) \right| > t^{1/r} / 2 \right) dt \\ &= \epsilon + I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Do $|Z_{ni}| \leq k_n^{1/r} A_{ni} |X_{ni}| I(k_n^{1/r} a_{ni} |X_{ni}| > t^{1/r}) + k_n^{1/r} a_{ni} |X_{ni}| I(k_n^{1/r} a_{ni} |X_{ni}| > t^{1/r})$ và giả thiết (ii), ta có

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq k_n \epsilon} \left| t^{-1/r} \sum_{i=u_n}^{v_n} EZ_{ni} \right| &\leq \sup_{t \geq k_n \epsilon} t^{-1/r} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|Z_{ni}| \\ &\leq \sup_{t \geq k_n \epsilon} t^{-1/r} 2 \sum_{i=u_n}^{v_n} k_n^{1/r} E|A_{ni} X_{ni}| I(k_n^{1/r} a_{ni} |X_{ni}| > t^{1/r}) \\ &\leq 2\epsilon^{-1/r} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|A_{ni} X_{ni}| I(a_{ni} |X_{ni}| > \epsilon^{1/r}) \\ &\leq 2\epsilon^{-1} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|A_{ni} X_{ni}|^r I(a_{ni}^r |X_{ni}|^r > \epsilon) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Do đó, tồn tại một số nguyên N sao cho

$$\sup_{t \geq k_n \epsilon} \left| t^{-\frac{1}{r}} \sum_{i=u_n}^{v_n} EZ_{ni} \right| \leq \frac{1}{4} \quad \text{nếu } n > N.$$

Từ $\int_a^\infty P(|X| > t) dt \leq E|X| I(|X| > a)$, ta có với mọi $n > N$,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq k_n^{-1} \int_{k_n \epsilon}^\infty P \left(\left| \sum_{i=u_n}^{v_n} Z_{ni} \right| + \left| \sum_{i=u_n}^{v_n} EZ_{ni} \right| > t^{1/r} / 2 \right) dt \\ &\leq k_n^{-1} \int_{k_n \epsilon}^\infty P \left(\left| \sum_{i=u_n}^{v_n} Z_{ni} \right| > t^{1/r} / 4 \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq k_n^{-1} \sum_{i=u_n}^{v_n} \int_{k_n \epsilon}^{\infty} P(k_n^{1/r} a_{ni} |X_{ni}| > t^{1/r}) dt \\ &\leq \sum_{i=u_n}^{v_n} a_{ni}^r E|X_{ni}|^r I(a_{ni}^r |X_{ni}|^r > \epsilon). \end{aligned}$$

Để có bất đẳng thức thứ ba ta sử dụng tính chất sau:

$$\left\{ \left| \sum_{i=u_n}^{v_n} Z_{ni} \right| > t^{1/r} / 4 \right\} \subset \bigcup_{i=u_n}^{v_n} \{k_n^{1/r} a_{ni} |X_{ni}| > t^{1/r}\}.$$

Thật vậy, nếu w không thuộc về bên phải thì $k_n^{1/r} a_{ni} |X_{ni}| \leq t^{1/r}$ với mọi $u_n \leq i \leq v_n$, do đó $Z_{ni} = 0$ với mọi $u_n \leq i \leq v_n$, điều này dẫn đến w không thuộc về bên trái.

Do đó $I_1 \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$ theo (ii).

Bây giờ ta ước lượng I_2 . Vì $\{Y_{ni}, u_n \leq i \leq v_n\}$ là các biến ngẫu nhiên NQD đôi một nên áp dụng Bổ đề 2 và bất đẳng thức tam giác ta có

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 4k_n^{-1} \int_{k_n \epsilon}^{\infty} t^{-2/r} E \left| \sum_{i=u_n}^{v_n} (Y_{ni} - EY_{ni}) \right|^2 dt \\ &\leq 8k_n^{-1} \int_{k_n \epsilon}^{\infty} t^{-2/r} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|Y_{ni}|^2 dt \\ &= 8k_n^{-1} \sum_{i=u_n}^{v_n} \int_{k_n \epsilon}^{\infty} P(k_n^{1/r} a_{ni} |X_{ni}| > t^{1/r}) dt \\ &\quad + 8k_n^{-1} \sum_{i=u_n}^{v_n} \int_{k_n \epsilon}^{\infty} t^{-2/r} k_n^{2/r} a_{ni}^2 E|X_{ni}|^2 I(k_n^{1/r} a_{ni} |X_{ni}| \leq (k_n \epsilon)^{1/r}) dt \\ &\quad + 8k_n^{-1} \sum_{i=u_n}^{v_n} \int_{k_n \epsilon}^{\infty} t^{-2/r} k_n^{2/r} a_{ni}^2 E|X_{ni}|^2 I((k_n \epsilon)^{1/r} < k_n^{1/r} a_{ni} |X_{ni}| \leq t^{1/r}) dt \\ &= I_3 + I_4 + I_5. \end{aligned}$$

với I_3 , tương tự chứng minh I_1 ta có

$$I_3 \leq 8 \sum_{i=u_n}^{v_n} E|A_{ni} X_{ni}|^r I(a_{ni}^r |X_{ni}|^r > \epsilon) \rightarrow 0.$$

với I_4 , vì $0 < \epsilon < 1$ nên ta có

$$\begin{aligned} I_4 &= \frac{8r}{2-r} \epsilon^{-2/r+1} \sum_{i=u_n}^{v_n} a_{ni}^2 E|X_{ni}|^2 I(a_{ni}^r |X_{ni}|^r \leq \epsilon) \\ &= \frac{8r}{2-r} \epsilon^{-2/r+1} \sum_{i=u_n}^{v_n} a_{ni}^2 E|X_{ni}|^2 I(a_{ni}^r |X_{ni}|^r \leq \epsilon^2) \\ &\quad + \frac{8r}{2-r} \epsilon^{-2/r+1} \sum_{i=u_n}^{v_n} a_{ni}^2 E|X_{ni}|^2 I(\epsilon^2 < a_{ni}^r |X_{ni}|^r \leq \epsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{8r}{2-r} \epsilon^{2/r-1} \sum_{i=u_n}^{v_n} a_{ni}^r E|X_{ni}|^r I(a_{ni}^r |X_{ni}|^r \leq \epsilon^2) \\
 &+ \frac{8r}{2-r} \sum_{i=u_n}^{v_n} a_{ni}^r E|X_{ni}|^r I(\epsilon^2 < a_{ni}^r |X_{ni}|^r \leq \epsilon) \\
 &\leq \frac{8r}{2-r} \epsilon^{2/r-1} \sup_{n \geq 1} \sum_{i=u_n}^{v_n} a_{ni}^r E|X_{ni}|^r + \frac{4r}{2-r} \sum_{i=u_n}^{v_n} a_{ni}^r E|X_{ni}|^r I(a_{ni}^r |X_{ni}|^r > \epsilon^2) \\
 &\rightarrow \frac{8r}{2-r} \epsilon^{2/r-1} \sup_{n \geq 1} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|A_{ni} X_{ni}|^r.
 \end{aligned}$$

Từ

$$\int_{k_n \epsilon^j}^{k_n \epsilon^{(j+1)}} t^{-2/r} dt \leq k_n^{-2/r+1} \epsilon^{-2/r+1} j^{-2/r}$$

và

$$\sum_{j=m}^{+\infty} j^{-2/r} \leq m^{-2/r} + \int_m^{+\infty} t^{-2/r} dt \leq (1 + r/(2-r)) m^{-2/r+1} \leq \frac{2}{2-r} ((m+1)/2)^{-2/r+1}$$

chúng ta có được

$$\begin{aligned}
 I_5 &= 8k_n^{-1} \sum_{i=u_n}^{v_n} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{k_n \epsilon^j}^{k_n \epsilon^{(j+1)}} t^{-2/r} k_n^{2/r} a_{ni}^2 E|X_{ni}|^2 I((k_n \epsilon)^{1/r} < k_n^{1/r} a_{ni} |X_{ni}| \leq t^{1/r}) dt \\
 &\leq 8k_n^{2/r-1} \sum_{i=u_n}^{v_n} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ni}^2 E|X_{ni}|^2 I((k_n \epsilon)^{1/r} < k_n^{1/r} a_{ni} |X_{ni}| \leq (k_n \epsilon^{(j+1)})^{1/r}) \int_{k_n \epsilon^j}^{k_n \epsilon^{(j+1)}} t^{-2/r} dt \\
 &\leq 8\epsilon^{-2/r+1} k_n^{2/r-1} \sum_{i=u_n}^{v_n} \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^j \left[a_{ni}^2 E|X_{ni}|^2 I((k_n \epsilon m)^{1/r} < k_n^{1/r} a_{ni} |X_{ni}| \leq (k_n \epsilon^{(m+1)})^{1/r}) \right. \\
 &\quad \left. \times k_n^{-2/r+1} j^{-2/r} \right] \\
 &= 8\epsilon^{-2/r+1} k_n^{-1} \sum_{i=u_n}^{v_n} \sum_{m=1}^{+\infty} \left[k_n^{2/r} a_{ni}^2 E|X_{ni}|^2 I((k_n \epsilon m)^{1/r} < k_n^{1/r} a_{ni} |X_{ni}| \leq (k_n \epsilon^{(m+1)})^{1/r}) \right. \\
 &\quad \left. \times k_n^{-2/r+1} \times \sum_{j=m}^{+\infty} j^{-2/r} \right] \\
 &\leq 8\epsilon^{-2/r+1} k_n^{-1} \sum_{i=u_n}^{v_n} \sum_{m=1}^{+\infty} \left[k_n a_{ni}^r E|X_{ni}|^r I((k_n \epsilon m)^{1/r} < k_n^{1/r} a_{ni} |X_{ni}| \leq (k_n \epsilon^{(m+1)})^{1/r}) \right. \\
 &\quad \left. \times (k_n \epsilon^{(m+1)})^{(2-r)/r} k_n^{-2/r+1} \frac{2}{2-r} \left(\frac{m+1}{2} \right)^{-2/r+1} \right] \\
 &= \frac{8}{2-r} 2^{2/r-1} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|A_{ni} X_{ni}|^r I(a_{ni}^r |X_{ni}|^r > \epsilon) \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Do đó,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup E \left| \sum_{i=u_n}^{v_n} A_{ni}(X_{ni} - EX_{ni}) \right|^r \leq \epsilon + \frac{8r}{2-r} \epsilon^{2/r-1} \sup_{n \geq 1} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|A_{ni}X_{ni}|^r.$$

Do điều kiện (i) nên cho $\epsilon \rightarrow 0$ ta được điều phải chứng minh.

Áp dụng Định lí 1, ta có thể suy ra các Hệ quả 1-2.

Hệ quả 1. Cho $1 \leq r < 2$, $\{X_{ni}, u_n \leq i \leq v_n, n \geq 1\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên NQD đôi một theo từng hàng và h -khả tích với số mũ r và cho $\{A_{ni}, u_n \leq i \leq v_n, n \geq 1\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên độc lập với mảng $\{X_{ni}\}$, thỏa mãn các điều kiện $\sup_{u_n \leq i \leq v_n} E|A_{ni}|^r \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty, k_n =$

1/ $\sup_{u_n \leq i \leq v_n} E|A_{ni}|^r, 0 < h(n) \uparrow \infty$, và $h(n)/k_n \rightarrow 0$. Khi đó

$$\sum_{i=u_n}^{v_n} A_{ni}(X_{ni} - EX_{ni}) \rightarrow 0$$

trong L^r và do đó hội tụ theo xác suất khi $n \rightarrow \infty$.

Chứng minh. Ta sẽ kiểm tra hai điều kiện (i) và (ii) của Định lí 1.

Từ điều kiện thứ nhất của h -khả tích với số mũ r , ta có

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|A_{ni}X_{ni}|^r \leq \sup_{n \geq 1} \sup_{u_n \leq i \leq v_n} E|A_{ni}|^r \sum_{i=u_n}^{v_n} E|X_{ni}|^r = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{k_n} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|X_{ni}|^r < +\infty.$$

Do đó điều kiện (i) của Định lí 1 được thỏa mãn. Vì $h(n)/k_n \rightarrow 0$, tồn tại một số nguyên N sao cho $h(n) < k_n$ nếu $n > N$. Với $n > N$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|A_{ni}X_{ni}|^r \cdot I((E|A_{ni}|)^r |X_{ni}|^r > \epsilon) &\leq \sup_{u_n \leq i \leq v_n} E|A_{ni}|^r \sum_{i=u_n}^{v_n} E|X_{ni}|^r \cdot I(|X_{ni}|^r > k_n \epsilon) \\ &= \frac{1}{k_n} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|X_{ni}|^r \cdot I(|X_{ni}|^r > k_n \epsilon) \\ &\leq \frac{1}{k_n} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|X_{ni}|^r \cdot I(|X_{ni}|^r > h(n)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

do điều kiện thứ hai của h -khả tích với số mũ r . Như vậy, điều kiện (ii) của Định lí 1 được thỏa mãn.

Lấy $A_{ni} = k_n^{-1/r}$ (h.c.c.) với $u_n \leq i \leq v_n$ và $n \geq 1$ trong Hệ quả 1, ta ngay lập tức thu được hệ quả sau.

Hệ quả 2. Cho $1 \leq r < 2$, $\{X_{ni}, u_n \leq i \leq v_n, n \geq 1\}$ là một mảng các biến ngẫu nhiên NQD đôi một theo từng hàng và h -khả tích với số mũ r , $k_n \rightarrow +\infty, 0 < h(n) \uparrow \infty$, và $h(n)/k_n \rightarrow 0$. Khi đó

$$\frac{\sum_{i=u_n}^{v_n} (X_{ni} - EX_{ni})}{k_n^{1/r}} \rightarrow 0$$

trong L^r và do đó hội tụ theo xác suất khi $n \rightarrow \infty$.

4. Ứng dụng

Trong phần này chúng tôi trình bày ứng dụng Định lí 1 vào ước lượng mô hình hồi quy phi tham số. Xét mô hình hồi quy phi tham số với thiết kế ngẫu nhiên

$$Y_{ni} = f(X_{ni}) + \varepsilon_{ni}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (3.1)$$

trong đó X_{ni} là các điểm thiết kế ngẫu nhiên với giá trị thuộc tập compact $A \subset \mathbb{R}^d$, ε_{ni} là các sai số ngẫu nhiên sao cho $(\varepsilon_{n1}, \varepsilon_{n2}, \dots, \varepsilon_{nn})$ có cùng phân phối xác suất với $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ với mọi $n \geq 1$. Hàm ước lượng hồi quy phi tham số của $f(x)$ được định nghĩa bởi:

$$\hat{f}_n(x) = \sum_{i=1}^n W_{ni}(x) Y_{ni},$$

trong đó $W_{ni}(x) = W_{ni}(x, X_{n1}, \dots, X_{nn})$ là các hàm trọng số ngẫu nhiên phụ thuộc vào $x, X_{n1}, \dots, X_{nn}$.

Để thiết lập sự hội tụ trong giá trị trung bình cho ước lượng có trọng số ngẫu nhiên $\hat{f}_n(x)$ trong mô hình hồi quy phi tham số với sai số ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một với thiết kế ngẫu nhiên, các giả thiết sau đây về hàm trọng số $W_{ni}(x)$ sẽ được sử dụng: với mọi $x \in A$,

$$(A_1) \quad E|\sum_{i=1}^n W_{ni}(x) - 1| = o(1);$$

$$(A_2) \quad \sum_{i=1}^n E|W_{ni}(x)| = O(1);$$

$$(A_3) \quad \sum_{i=1}^n |W_{ni}(x)| |f(X_{ni}) - f(x)| \cdot I(|X_{ni} - x| > a) \rightarrow 0 \text{ trong } L^1 \text{ với mọi } a > 0.$$

Dựa trên các giả thiết ở trên, chúng tôi trình bày kết quả sau về hội tụ theo trung bình của hàm ước lượng hồi quy phi tham số $\hat{f}_n(x)$ bằng cách áp dụng Định lí 1.

Định lí 2. Trong mô hình (3.1), giả sử rằng $\{\varepsilon_n, \varepsilon_{ni}; n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên NQD đôi một, có cùng phân phối xác suất, kỳ vọng bằng 0 và phương sai hữu hạn. Nếu $\{W_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là mảng các biến ngẫu nhiên NQD đôi một theo hàng, độc lập với $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ và tồn tại $1 \leq r < 2$ sao cho

$$\sum_{i=1}^n E|W_{ni}|^r \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

thì với mọi $x \in c(f)$,

$$\hat{f}_n(x) \rightarrow f(x) \text{ trong } L^1 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

trong đó $c(f)$ là tập các điểm liên tục của hàm $f(x)$ trên tập A .

Chứng minh. Với mọi $x \in A$, rõ ràng là

$$\hat{f}_n(x) - f(x) = \sum_{i=1}^n W_{ni}(x) \varepsilon_{ni} + \left[\sum_{i=1}^n W_{ni}(x) f(X_{ni}) - f(x) \right].$$

Ta có

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|W_{ni} \varepsilon_{ni}|^r \leq E|\varepsilon|^r \sup_{n \geq 1} \sum_{i=u_n}^{v_n} E|W_{ni}|^r < +\infty \text{ (do (3.2) và } E|\varepsilon|^2 < +\infty).$$

Do đó điều kiện (i) của Định lí 1 thỏa mãn. Tiếp theo ta kiểm tra điều kiện (ii). Đặt $c = \sup_{n \geq 1} \max_{1 \leq i \leq n} (E|W_{ni}|)^r < +\infty$. Với mọi $\epsilon > 0$,

$$\sum_{i=u_n}^{v_n} E|W_{ni} X_{ni}|^r I((E|W_{ni}|)^r |X_{ni}|^r > \epsilon)$$

$$\leq E|\epsilon|^r I(c|\epsilon|^r > \epsilon) \sum_{i=u_n}^{v_n} E|W_{ni}|^r \leq CE|\epsilon|^r I(c|\epsilon|^r > \epsilon) \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

Áp dụng Định lí 1 ta được

$$\sum_{i=1}^n W_{ni}(x) \epsilon_{ni} \rightarrow 0 \text{ trong } L^1 \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

Do đó, để hoàn tất chứng minh, ta cần chỉ ra rằng

$$\sum_{i=1}^n W_{ni}(x) [f(X_{ni}) - f(x)] \rightarrow 0 \text{ trong } L^1 \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

Vì $x \in c(f)$, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $\theta > 0$ sao cho $|f(x') - f(x)| < \epsilon$ với mọi $x' \in A$ và $\|x' - x\| < \theta$. Nếu ta chọn $a \in (0, \theta)$, thì ta có

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n W_{ni}(x) f(X_{ni}) - f(x) \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^n |W_{ni}(x)| |f(X_{ni}) - f(x)| I(|X_{ni} - x| \leq a) \\ & \quad + \sum_{i=1}^n |W_{ni}(x)| |f(X_{ni}) - f(x)| I(|X_{ni} - x| > a) \\ & \quad + \left| \sum_{i=1}^n W_{ni}(x) - 1 \right| |f(x)| \\ & \leq \epsilon \sum_{i=1}^n |W_{ni}(x)| + \sum_{i=1}^n |W_{ni}(x)| |f(X_{ni}) - f(x)| I(|X_{ni} - x| > a) \\ & \quad + \left| \sum_{i=1}^n W_{ni}(x) - 1 \right| |f(x)| \rightarrow 0 \text{ trong } L^1 \text{ khi } n \rightarrow +\infty \text{ sau đó cho } \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Do đó, $|\sum_{i=1}^n W_{ni}(x) f(X_{ni}) - f(x)| \rightarrow 0$ trong L^1 khi $n \rightarrow \infty$. Chứng minh được chứng minh.

Với mỗi $x \in A$, ta sắp xếp lại mẫu số liệu $(X^1, Y^1), \dots, (X_n, Y_n)$ theo thứ tự tăng dần của $\|X_i - x\|$. Chuỗi dữ liệu đã sắp xếp lại được ký hiệu là

$$(X_{(1,n)}(x), Y_{(1,n)}(x)), \dots, (X_{(n,n)}(x), Y_{(n,n)}(x))$$

Hoặc

$$(X_{(1,n)}, Y_{(1,n)}), \dots, (X_{(n,n)}, Y_{(n,n)}),$$

Đặt

$$J(x) = \{i : x_i \text{ là một trong } k_n \text{ giá trị gần } x \text{ nhất}\}.$$

Ước lượng hàm hồi quy k -NN được xác định bởi

$$\hat{f}_n(x) = \sum_{i=1}^n \hat{W}_{ni}(x) Y_i,$$

trong đó

$$\widehat{W}_{ni}(x) = \begin{cases} \frac{1}{k_n} & \text{nếu } i \in J(x), \\ 0 & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Hệ quả 3. Trong mô hình (3.1), giả sử rằng $\{\varepsilon, \varepsilon_{ni}; n \geq 1\}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên NQD đôi một và có cùng phân phối xác suất với kỳ vọng bằng 0 và phương sai hữu hạn. Giả sử rằng f là hàm số liên tục trên A , $\{X_{ni}, 1 \leq i \leq n\}$ và $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ độc lập với nhau. Nếu $k_n \rightarrow \infty$ và $k_n/n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$, thì với mọi $x \in A$, hàm ước lượng hồi quy k -NN

$$\widehat{f}_n(x) = \sum_{i=1}^n \widehat{W}_{ni}(x) Y_i \rightarrow f(x)$$

trong L^1 khi $n \rightarrow +\infty$.

Chứng minh. Dũng và Son [2] đã chỉ ra rằng $\{\widehat{W}_{ni}(x), 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ là mảng biến ngẫu nhiên NQD đôi một theo hàng. Vì $\sum_{i=1}^n \widehat{W}_{ni}(x) = 1$ nên các điều kiện (A1) và (A2) thỏa mãn. Với $1 < r < 2$,

$$\sum_{i=1}^n E|\widehat{W}_{ni}(x)|^r = \frac{1}{k_n^{r-1}} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

Do đó điều kiện (3.3) thỏa mãn. Cuối cùng ta cần kiểm tra điều kiện (A3). Vì f là hàm liên tục trên tập compact A nên bị chặn trên A , do đó ta có

$$\sum_{i=1}^n |\widehat{W}_{ni}(x)| |f(X_{ni}) - f(x)| I(|X_{ni} - x| > a) \leq CI(|X_{k_n,n} - x| > a).$$

Do đó, lấy kỳ vọng hai vế và theo Bổ đề 6.1 trong [3], ta có

$$\sum_{i=1}^n E(|\widehat{W}_{ni}(x)| |f(X_{ni}) - f(x)| I(|X_{ni} - x| > a)) \leq CP(|X_{k_n,n} - x| > a) \rightarrow 0.$$

Hệ quả được chứng minh.

5. Kết luận

Chúng tôi đã thiết lập được luật yếu số lớn đối với tổng có trọng số ngẫu nhiên các biến ngẫu nhiên phụ thuộc âm đôi một và ứng dụng vào ước lượng mô hình hồi quy phi tham số.

Tài liệu tham khảo

- [1] Chen, P., Zhang, T. and Sung, S.H. (2019). "Strong laws for randomly weighted sums of random variables and applications in the bootstrap and random design regression". *Statistica Sinica*, 29, 1739-1749.
- [2] Lehmann. (1966). "Some concepts of dependence". *Ann. Math. Statist*, 43, 1137-1153.
- [3] Dung, L.V., Son, T.C. (2022). "Complete moment convergence for m-ANA random variables and statistical applications". *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 92(2), 370-394.
- [4] Györfi L., Kohler M., Krzyżak A., Walk H. (2002). *A Distribution-Free Theory of Nonparametric Regression*. New York: Springer.
- [5] Patterson R.F., Taylor R.L. (1997). "Strong laws of large numbers for negatively dependent random elements". *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 30(7), 4229-4235.
- [6] Sung S.H. (2013). "Convergence in r-mean of weighted sums of NQD random variables". *Appl. Math. Lett*, 26, 18-24.