



Phương pháp chiếu kết hợp giải bài toán cân bằng

A hybrid projection method for solving equilibrium problems

Nguyễn Đức Hiền^{a*}

Nguyen Duc Hien^{a*}

^a*Ban Hợp tác Doanh nghiệp và Khởi nghiệp, Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam*

^a*Department of Cooperation and Start Up, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Viet Nam*

(Ngày nhận bài: 25/02/2025, ngày phản biện xong: 14/03/2025, ngày chấp nhận đăng: 01/4/2025)

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu một phương pháp lặp mới để tìm một phần tử chung của tập hợp các điểm bất động của họ p ánh xạ giả co chặt và tập hợp các nghiệm của bài toán cân bằng với song hàm giả đơn điệu. Sự khác biệt cơ bản ở đây là tại mỗi bước lặp, chúng tôi chỉ giải một bài toán lồi mạnh và thực hiện một phép chiếu lên tập C , trong đó C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian $\mathbb{R}^k$.

Từ khóa: Bài toán cân bằng; giả đơn điệu; phương pháp dưới đạo hàm; giả co chặt; điểm bất động; tìm kiếm theo đường thẳng.

Abstract

In this paper, we introduce a new iteration method for finding a common element of the set of common fixed points of p strict pseudocontractions and the set of solutions of equilibrium problems for pseudomonotone bifunctions. The fundamental difference here is that at each iteration n , we only solve a strongly convex problem and perform a projection on C , with C is a nonempty closed convex subset of $\mathbb{R}^k$.

Keywords: Equilibrium problems; pseudomonotone; extragradient method; strict pseudo-contractions; fixed point; inesearch.

*Tác giả liên hệ: Nguyễn Đức Hiền

Email: nguyenduchien@duytan.edu.vn

1. Kiến thức chuẩn bị

Định nghĩa 1.1 Cho C là tập con lồi đóng, khác rỗng trong không gian Euclide thực $\mathbb{R}^k$ và song hàm $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$. Bài toán cân bằng, viết tắt là $EP(C, f)$, được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in C \text{ sao cho } f(x^*, x) \geq 0, \forall x \in C.$$

Song hàm f thỏa mãn tính chất $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$ được gọi là hàm cân bằng trên C .

Tập nghiệm của bài toán $EP(C, f)$ được ký hiệu là $Sol(C, f)$. Để thấy được tính đơn điệu suy rộng của bài toán cân bằng, chúng tôi xin nhắc lại một số định nghĩa của song hàm f trong bài toán cân bằng sau đây. Cho song hàm $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$; khi đó, song hàm f được gọi là

- đơn điệu mạnh (strongly monotone) trên C với hệ số $\gamma > 0$, nếu

$$f(x, y) + f(y, x) \leq -\gamma \|x - y\|^2, \forall x, y \in C;$$

- đơn điệu chặt (strictly monotone) trên C , nếu

$$f(x, y) + f(y, x) < 0, \forall x, y \in C \text{ và } x \neq y;$$

- đơn điệu (monotone) trên C , nếu

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0, \forall x, y \in C;$$

- giả đơn điệu (pseudomonotone) trên C , nếu

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0, \forall x, y \in C;$$

- liên tục kiểu Lipschitz (Lipschitz-type continuous) trên C với các hằng số $c_1 > 0$ và $c_2 > 0$, nếu

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - c_1 \|x - y\|^2 - c_2 \|y - z\|^2, \forall x, y, z \in C.$$

- giả đơn điệu theo x^* (pseudomonotone with respect to x^*) trên C nếu

$$\forall y \in C, f(x^*, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x^*) \leq 0;$$

- giả đơn điệu theo tập S (pseudomonotone with respect to S) trên C nếu f là giả đơn điệu theo x^* trên C với mọi $x^* \in S$.

Các định nghĩa này được trích dẫn từ các tài liệu [2, 3, 4].

Định nghĩa 1.2 Cho C là tập lồi đóng khác rỗng trong không gian Euclide $\mathbb{R}^k$. Ánh xạ $S : C \rightarrow C$ được gọi là giả co chặt nếu tồn tại hằng số $0 \leq L < 1$ sao cho

$$\|S(x) - S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 + L\|(I - S)(x) - (I - S)(y)\|^2, \quad \forall x, y \in C,$$

trong đó I ánh xạ đồng nhất trên C . Tập điểm bất động của S được ký hiệu $\text{Fix}(S)$.

Để chứng minh sự hội tụ của thuật toán trong Mục 2, tôi sử dụng một số tính chất quan trọng của ánh xạ giả co chặt và tính chất của phép chiếu Euclide.

Mệnh đề 1.3 Cho C là tập lồi đóng khác rỗng trong không gian Euclide $\mathbb{R}^k$, $S : C \rightarrow C$ là ánh xạ giả co chặt với hằng số L và với mỗi $i = 1, \dots, p$, $S_i : C \rightarrow C$ là một ánh xạ giả co chặt với hằng số L_i , $0 \leq L_i < 1$. Khi đó,

(a) S thỏa mãn điều kiện Lipschitz

$$\|S(x) - S(y)\| \leq \frac{1+L}{1-L} \|x - y\|, \quad \forall x, y \in C;$$

(b) $I - S$ nữa đóng tại 0. Nghĩa là, nếu $\{x^n\}$ là dãy trong C thỏa mãn $x^n \rightarrow \bar{x}$ và $(I - S)(x^n) \rightarrow 0$, thì $(I - S)(\bar{x}) = 0$;

(c) Tập điểm bất động $\text{Fix}(S)$ là tập lồi, đóng;

(d) Nếu $\lambda_i > 0$ và $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$, thì $\sum_{i=1}^p \lambda_i S_i$ ánh xạ giả co chặt với hằng số $\bar{L}$. Với $\bar{L} = \max\{L_i : 1 \leq i \leq p\}$;

(e) Nếu λ_i được xác định trong (d) và $\{S_i : i = 1, \dots, p\}$ có chung điểm bất động, thì

$$\text{Fix}\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i S_i\right) = \cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i).$$

Định nghĩa 1.4 Cho $C \subset \mathbb{R}^k$ là một tập con khác rỗng. Với $x \in \mathbb{R}^k$, đặt

$$d_C(x) := \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Ta gọi $d_C(x)$ là khoảng cách từ x đến C . Nếu tồn tại $x^* \in C$ sao cho $d_C(x) = \|x - x^*\|$ thì ta nói x^* là hình chiếu vuông góc của x trên C , ký hiệu $x^* := \text{Pr}_C(x)$.

Định lý 1.5 Cho $C \subset \mathbb{R}^k$ là tập lồi, đóng, khác rỗng. Khi đó

(a) Với mọi $x \in \mathbb{R}^k$, hình chiếu x^* của x trên C luôn tồn tại, duy nhất và $x^* = \text{Pr}_C(x) \Leftrightarrow \langle x - x^*, y - x^* \rangle \leq 0, \forall y \in C$.

(b) Với mọi $x^1, x^2 \in C$, ta có tính chất không giãn của phép chiếu $\|\text{Pr}_C(x^1) - \text{Pr}_C(x^2)\| \leq \|x^1 - x^2\|$.

(c) Với mọi $x, y \in \mathbb{R}^k$, ta có $\|\text{Pr}_C(x) - \text{Pr}_C(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \|\text{Pr}_C(x) - x + y - \text{Pr}_C(y)\|^2$.

(d) Với mọi $x \in C$ và $y \in \mathbb{R}^k$, ta có $\langle x - y, x - \text{Pr}_C(y) \rangle \geq \|x - \text{Pr}_C(y)\|^2$.

Bổ đề 1.6 ([5]) Cho C là tập tập lồi đóng khác rỗng trong $\mathbb{R}^k$. Giả sử rằng, với mọi $u \in C$, dãy $\{x^n\}$ thỏa mãn

$$\|x^{n+1} - u\| \leq \|x^n - u\|, \quad \forall n \geq 0.$$

Khi đó, dãy $\{\text{Pr}_C(x^n)\}$ hội tụ đến $\bar{x} \in C$.

2. Thuật toán và sự hội tụ của thuật toán

2.1. Phát biểu bài toán

Cho C là tập lồi đóng trong $\mathbb{R}^k$, song hàm $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$, $S_i : C \rightarrow C$ giả co chặt trên C với $0 \leq L_i < 1, i = 1, \dots, p$. Bài toán tìm điểm chung giữa bài toán cân bằng và tập điểm bất động của họ hữu hạn các ánh xạ giả co chặt được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x^* \in \cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i) \cap \text{Sol}(C, f).$$

2.2. Thuật toán SAP

Bước 0. Cho $\varepsilon > 0$. Chọn $x^0 \in C, r = 0, \gamma \in (0, 1), 0 < \sigma < \frac{\beta}{2}$ và các dãy số dương $\{\lambda_{n,i}\}$ và $\{\alpha_n\}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} \{\alpha_n\} \subset [a, b] \subset (\bar{L}, 1) \text{ trong đó } \bar{L} := \max\{L_i : 1 \leq i \leq p\}, \\ \sum_{i=1}^p \lambda_{n,i} = 1, \forall n \geq 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{n,i} = \lambda_i \in (0, 1), \forall i = 1, \dots, p. \end{cases}$$

Bước 1. Giải bài toán lồi mạnh $y^n = \operatorname{argmin} \left\{ f(x^n, y) + \frac{\beta}{2} \|y - x^n\|^2 \mid y \in C \right\}$ và đặt $r(x^n) = x^n - y^n$. Nếu $\|r(x^n)\| \neq 0$ thì sang Bước 2. Ngược lại, đặt $w^n = x^n$ và sang Bước 3.

Bước 2. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất m_n sao cho

$$f(x^n - \gamma^{m_n} r(x^n), y^n) \leq -\sigma \|r(x^n)\|^2. \quad (2.1)$$

Tính $w^n = Pr_{C \cap H_n}(x^n)$, trong đó $z^n = x^n - \gamma^{m_n} r(x^n)$, $v^n \in \partial_2 f(z^n, z^n)$ và $H_n = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \langle v^n, x - z^n \rangle \leq 0\}$, và sang Bước 3.

Bước 3. Tính $x^{n+1} = \alpha_n w^n + (1 - \alpha_n) \sum_{i=1}^p \lambda_{n,i} S_i(w^n)$. Gán $n := n + 1$ và trở về Bước 1.

2.3. Sự hội tụ của thuật toán

Định lý 2.1 Cho C là tập tập lồi đóng khác rỗng trong $\mathbb{R}^k$, các ánh xạ $S_i : C \rightarrow C$ là L_i -Lipschitz giả đơn điệu, với mọi $i = 1, \dots, p$ và $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

- (i) $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$, f giả đơn điệu trên C ,
- (ii) f liên tục trên C ,
- (iii) Với mỗi $x \in C$, $f(x, \cdot)$ lồi và khả vi trên C ,
- (iv) Nếu dãy $\{t^n\}$ bị chặn, thì dãy $\{v^n\}$ cũng bị chặn, trong đó

$$v^n \in \partial_2 f(t^n, t^n),$$

- (v) $\cap_{i=1}^p \operatorname{Fix}(S_i) \cap \operatorname{Sol}(C, f) \neq \emptyset$.

Khi đó, các dãy lặp $\{x^n\}$, $\{y^n\}$ và $\{w^n\}$ tạo ra trong Thuật toán SAP hội tụ đến x^* , trong đó

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} Pr_{\cap_{i=1}^p \operatorname{Fix}(S_i, C) \cap \operatorname{Sol}(C, f)}(x^n).$$

Chứng minh

Nếu tồn tại n_0 sao cho $x^n = y^n$ với mọi $n \geq n_0$, thì các dãy $\{x^n\}$, $\{y^n\}$ và $\{w^n\}$ sinh ra trong Thuật toán SAP hội tụ đến $\bar{x} \in \cap_{i=1}^p S_i \cap \operatorname{Sol}(C, f)$.

Nếu $\|r(x^n)\| \neq 0$, thì tồn tại số nguyên không âm nhỏ nhất m_n sao cho

$$f(x^n - \gamma^{m_n} r(x^n), y^n) \leq -\sigma \|r(x^n)\|^2.$$

Khi $\|r(x^n)\| \neq 0$ và $\gamma \in (0, 1)$, ta giả sử ngược lại rằng với mọi số nguyên không âm m , ta có

$$f(x^n - \gamma^m r(x^n), y^n) + \sigma \|r(x^n)\|^2 > 0.$$

Lấy giới hạn hai vế cho bất đẳng thức trên khi $m \rightarrow \infty$ và do tính liên tục của f , ta được

$$f(x^n, y^n) + \sigma \|r(x^n)\|^2 \geq 0. \quad (2.2)$$

Mặt khác, vì y^n là nghiệm duy nhất của bài toán lỗi mạnh min $\left\{ f(x^n, y) + \frac{\beta}{2} \|y - x^n\|^2 \mid y \in C \right\}$, nên ta có $f(x^n, y) + \frac{\beta}{2} \|y - x^n\|^2 \geq f(x^n, y^n) + \frac{\beta}{2} \|y^n - x^n\|^2, \forall y \in C$. Thay $y = x^n$ vào bất đẳng thức này ta có

$$f(x^n, y^n) + \frac{\beta}{2} \|r(x^n)\|^2 \leq 0. \quad (2.3)$$

Kết hợp (2.2) và (2.3), ta có $\sigma \|r(x^n)\|^2 \geq \frac{\beta}{2} \|r(x^n)\|^2$, suy ra $\|r(x^n)\| = 0$ hoặc $\sigma \geq \frac{\beta}{2}$. Điều này trái với giả thiết $\|r(x^n)\| \neq 0$ và $\sigma < \frac{\beta}{2}$.

Ta chứng minh rằng nếu $\|r(x^n)\| \neq 0$ thì $x^n \notin H_n$.

Từ $z^n = x^n - \gamma^{m_n} r(x^n)$, suy ra $y^n - z^n = \frac{1 - \gamma^{m_n}}{\gamma^{m_n}} (z^n - x^n)$. Ta dùng (2.1) và giả thiết $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$, ta được

$$0 > -\sigma \|r(x^n)\|^2 \geq f(z^n, y^n) = f(z^n, y^n) - f(z^n, z^n) \geq \langle v^n, y^n - z^n \rangle = \frac{1 - \gamma^{m_n}}{\gamma^{m_n}} \langle z^n - x^n, v^n \rangle$$

Do đó $\langle x^n - z^n, v^n \rangle > 0$. Suy ra $x^n \notin H_n$.

Tiếp theo ta chứng minh nếu $\|r(x^n)\| \neq 0$ thì $w^n = Pr_{C \cap H_n}(\bar{y}^n)$, trong đó $\bar{y}^n = Pr_{H_n}(x^n)$.

Đặt $K = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \langle w, x - x^0 \rangle \leq 0\}$ và $\|w\| \neq 0$, ta biết rằng

$$Pr_K(y) = y - \frac{\langle w, y - x^0 \rangle}{\|w\|^2} w,$$

Do đó $\bar{y}^n = Pr_{H_n}(x^n) = x^n - \frac{\langle v^n, x^n - z^n \rangle}{\|v^n\|^2} v^n = x^n - \frac{\gamma^{m_n} \langle v^n, r(x^n) \rangle}{\|v^n\|^2} v^n$. Mặt khác, với mỗi $y \in C \cap H_n$ tồn tại $\lambda \in (0, 1)$ sao cho $\hat{x} = \lambda x^n + (1 - \lambda)y \in C \cap \partial H_n$, trong đó $\partial H_n = \{x \in \mathbb{R}^k \mid \langle v^n, x - z^n \rangle = 0\}$. Từ kết quả ở trên, ta suy ra $x^n \in C$ nhưng $x^n \notin H_n$. Do đó,

$$\begin{aligned} \|y - \bar{y}^n\|^2 &\geq (1 - \lambda)^2 \|y - \bar{y}^n\|^2 = \|\hat{x} - \lambda x^n - (1 - \lambda)\bar{y}^n\|^2 = \|(\hat{x} - \bar{y}^n) - \lambda(x^n - \bar{y}^n)\|^2 \\ &= \|\hat{x} - \bar{y}^n\|^2 + \lambda^2 \|x^n - \bar{y}^n\|^2 - 2\lambda \langle \hat{x} - \bar{y}^n, x^n - \bar{y}^n \rangle = \|\hat{x} - \bar{y}^n\|^2 + \lambda^2 \|x^n - \bar{y}^n\|^2 \geq \|\hat{x} - \bar{y}^n\|^2, \end{aligned}$$

Vì $\bar{y}^n = Pr_{H_n}(x^n)$ nên $\|\hat{x} - x^n\|^2 = \|\hat{x} - \bar{y}^n + \bar{y}^n - x^n\|^2 = \|\hat{x} - \bar{y}^n\|^2 - 2\langle \hat{x} - \bar{y}^n, x^n - \bar{y}^n \rangle + \|\bar{y}^n - x^n\|^2 = \|\hat{x} - \bar{y}^n\|^2 + \|\bar{y}^n - x^n\|^2$. Từ $w^n = Pr_{C \cap H_n}(x^n)$ và định lý Pythagore, suy ra $\|\hat{x} - \bar{y}^n\|^2 = \|\hat{x} - x^n\|^2 - \|\bar{y}^n - x^n\|^2 \geq \|w^n - x^n\|^2 - \|\bar{y}^n - x^n\|^2 = \|w^n - \bar{y}^n\|^2$. Từ đó, ta có $\|w^n - \bar{y}^n\| \leq \|y - \bar{y}^n\|, \forall y \in C \cap H_n$, tức là $w^n = Pr_{C \cap H_n}(\bar{y}^n)$.

Chứng minh nếu $\|r(x^n)\| \neq 0$ thì $Sol(C, f) \subseteq C \cap H_n$. Giả sử $x^* \in Sol(C, f)$. Theo định nghĩa của x^* , $f(x^*, x) \geq 0$ với mọi $x \in C$ và do f giả đơn điệu trên C , ta nhận được

$$f(z^n, x^*) \leq 0. \quad (2.4)$$

Từ $v^n \in \partial_2 f(z^n, z^n)$ suy ra

$$\begin{aligned} f(z^n, x^*) &= f(z^n, x^*) - f(z^n, z^n) \\ &\geq \langle v^n, x^* - z^n \rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Kết hợp (2.4) và (2.5), ta được $\langle v^n, x^* - z^n \rangle \leq 0$. Theo định nghĩa của H_n , ta có $x^* \in H_n$. Do đó, $Sol(f, C) \subseteq C \cap H_n$.

Tiếp theo ta đi chứng minh nếu $\|r(x^n)\| \neq 0$ và dãy $\{v^n\}$ bị chặn trên bởi $M > 0$ thì dãy $\{\|x^n - x^*\|\}$ không tăng và hội tụ. Hơn nữa, ta có

$$\begin{aligned} \|x^{n+1} - x^*\|^2 &\leq \|x^n - x^*\|^2 - (1 - \alpha_n) \|w^n - \bar{y}^n\|^2 \\ &\quad - (1 - \alpha_n) \left(\frac{\gamma^{m_n} \sigma}{M(1 - \gamma^{m_n})} \right)^2 \|r(x^n)\|^4 \\ &\quad - (1 - \alpha_n)(\alpha_n - \bar{L}) \|\bar{S}_n(w^n) - w^n\|^2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

trong đó $\bar{y}^n = Pr_{H_n}(x^n)$, $\bar{S}_n := \sum_{i=1}^p \lambda_{n,i} S_i$ và $x^* \in \cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i) \cap \text{Sol}(C, f)$. Từ giả thiết ta có

$$\|r(x^n)\| \neq 0.$$

Theo kết quả chứng minh trên, ta suy ra $w^n = Pr_{C \cap H_n}(\bar{y}^n)$, tức là: $\langle \bar{y}^n - w^n, z - w^n \rangle \leq 0, \forall z \in C \cap H_n$, trong đó $\bar{y}^n = Pr_{H_n}(x^n)$. Thay $z = x^* \in \text{Sol}(C, f) \subseteq C \cap H_n$ theo chứng minh trên, khi đó ta được $\langle \bar{y}^n - w^n, x^* - w^n \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle y^n - w^n, x^* - \bar{y}^n + \bar{y}^n - w^n \rangle \leq 0$, Do đó, $\|w^n - \bar{y}^n\|^2 \leq \langle w^n - \bar{y}^n, x^* - \bar{y}^n \rangle$. Do vậy

$$\begin{aligned} \|w^n - x^*\|^2 &= \|w^n - \bar{y}^n + \bar{y}^n - x^*\|^2 \\ &\leq \langle x^* - \bar{y}^n, w^n - \bar{y}^n \rangle + \|\bar{y}^n - x^*\|^2 + 2\langle w^n - \bar{y}^n, \bar{y}^n - x^* \rangle \\ &\leq \|\bar{y}^n - x^*\|^2 - \|w^n - \bar{y}^n\|^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Vì $z^n = x^n - \gamma^{m_n} r(x^n)$ và $\bar{y}^n = Pr_{H_n}(x^n) = x^n - \frac{\langle v^n, x^n - z^n \rangle}{\|v^n\|^2} v^n$, nên

$$\begin{aligned} \|\bar{y}^n - x^*\|^2 &= \|x^n - x^*\|^2 - \left(\frac{\gamma^{m_n} \langle v^n, r(x^n) \rangle}{\|v^n\|} \right)^2 \\ &\quad - \frac{2\gamma^{m_n} \langle v^n, r(x^n) \rangle}{\|v^n\|^2} (\langle v^n, x^n - x^* \rangle - \gamma^{m_n} \langle v^n, r(x^n) \rangle) \\ \langle v^n, x^n - x^* - \gamma^{m_n} r(x^n) \rangle &= \|x^n - x^*\|^2 - \left(\frac{\gamma^{m_n} \langle v^n, r(x^n) \rangle}{\|v^n\|} \right)^2 \\ &\quad - \frac{2\gamma^{m_n} \langle v^n, r(x^n) \rangle}{\|v^n\|^2} \langle v^n, z^n - x^* \rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Do $v^n \in \partial_2 f(z^n, z^n)$ nên

$$f(z^n, y) - f(z^n, z^n) \geq \langle v^n, y - z^n \rangle, \forall y \in C. \quad (2.9)$$

Thay y bởi y^n và kết hợp các giả thiết $f(z^n, z^n) = 0$ và $z^n = x^n - \gamma^{m_n} r(x^n)$, ta nhận được

$$f(z^n, y^n) \geq \langle v^n, y^n - z^n \rangle = -(1 - \gamma^{m_n}) \langle v^n, r(x^n) \rangle.$$

Kết hợp bất đẳng thức này với (2.1) và giả thiết $\gamma \in (0, 1)$, ta được

$$\langle v^n, r(x^n) \rangle \geq \frac{\sigma}{1 - \gamma^{m_n}} \|r(x^n)\|^2. \quad (2.10)$$

Thay $y = x^*$ vào trong (2.9) và sử dụng $f(z^n, z^n) = 0$, ta nhận được

$$f(z^n, x^*) \geq \langle v^n, x^* - z^n \rangle. \quad (2.11)$$

Do f giả đơn điệu trên C và $f(x^*, x) \geq 0, \forall x \in C$, nên

$$f(z^n, x^*) \leq 0.$$

Kết hợp kết quả này với (2.11), ta được

$$0 \geq \langle v^n, x^* - z^n \rangle. \quad (2.12)$$

Sử dụng (2.8), (2.10) và (2.12), ta có

$$\begin{aligned} \|\bar{y}^n - x^*\|^2 &\leq \|x^n - x^*\|^2 - \left(\frac{\gamma^{m_n} \langle v^n, r(x^n) \rangle}{\|v^n\|} \right)^2 \\ &\leq \|x^n - x^*\|^2 - \left(\frac{\gamma^{m_n} \sigma}{\|v^n\|(1 - \gamma^{m_n})} \right)^2 \|r(x^n)\|^4. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Từ (2.7) và (2.13), suy ra

$$\begin{aligned} \|w^n - x^*\|^2 &\leq \|x^n - x^*\|^2 - \|w^n - \bar{y}^n\|^2 \\ &\quad - \left(\frac{\gamma^{m_n} \sigma}{\|v^n\|(1 - \gamma^{m_n})} \right)^2 \|r(x^n)\|^4. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Sử dụng $\bar{S}_n := \sum_{i=1}^p \lambda_{n,i} S_i$, (2.14), $x^{n+1} = \alpha_n w^n + (1 - \alpha_n) \sum_{i=1}^p \lambda_{n,i} S_i(w^n)$ và đẳng thức

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 &= \lambda\|x\|^2 + (1 - \lambda)\|y\|^2 \\ &\quad - \lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$\forall \lambda \in [0, 1]$, $x, y \in \mathbb{R}^k$, ta nhận được

$$\begin{aligned} \|x^{n+1} - x^*\|^2 &= \|\alpha_n w^n + (1 - \alpha_n) \bar{S}_n(w^n) - x^*\|^2 \\ &\leq \|x^n - x^*\|^2 - (1 - \alpha_n) \|w^n - \bar{y}^n\|^2 - (1 - \alpha_n) \left(\frac{\gamma^{m_n} \sigma}{\|v^n\|(1 - \gamma^{m_n})} \right)^2 \|r(x^n)\|^4 \\ &\quad - (1 - \alpha_n)(\alpha_n - \bar{L}) \|\bar{S}_n(w^n) - w^n\|^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Khi $\|r(x^n)\| = 0$, theo Thuật toán SAP và (2.15), ta có $w^n = x^n$ và

$$\begin{aligned} \|x^{n+1} - x^*\|^2 &= \|\alpha_n x^n + (1 - \alpha_n) \bar{S}_n(x^n) - x^*\|^2 \\ &\leq \alpha_n \|x^n - x^*\|^2 + (1 - \alpha_n) (\|x^n - x^*\|^2 + \bar{L} \|(I - \bar{S}_n)(x^n) \\ &\quad - (I - \bar{S}_n)(x^*)\|^2) - \alpha_n (1 - \alpha_n) \|(I - \bar{S}_n)(x^n) - \\ &\quad - (I - \bar{S}_n)(x^*)\|^2 = \|x^n - x^*\|^2 - (1 - \alpha_n)(\alpha_n - \bar{L}) \|\bar{S}_n(x^n) - x^n\|^2 \\ &\leq \|x^n - x^*\|^2. \end{aligned}$$

Kết hợp kết quả trên với (2.16), ta được $\|x^{n+1} - x^*\| \leq \|x^n - x^*\|$, $\forall n \geq 0$.

Do đó, dãy $\{\|x^n - x^*\|\}$ không tăng và hội tụ. Do (2.16) và dãy $\{v^n\}$ bị chặn trên bởi $M > 0$, nghĩa là, $\|v^n\| \leq M$, $\forall n \geq 0$, nên ta đạt được (2.6).

Ta chứng minh tồn tại $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - x^*\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|w^n - x^*\|$, trong đó $x^* \in \cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i) \cap \text{Sol}(C, f)$. Do đó, các dãy $\{x^n\}$, $\{y^n\}$, $\{z^n\}$, $\{v^n\}$ và $\{w^n\}$ cũng bị chặn. Theo chứng minh trên, tồn tại

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - x^*\|. \quad (2.17)$$

Từ $w^n = x^n$ nếu $\|r(x^n)\| = 0$; $w^n = \text{Pr}_{C \cap H_n}(x^n)$ nếu $\|r(x^n)\| \neq 0$ và chứng minh trên, ta suy ra

$$\|w^n - x^*\| \leq \|x^n - x^*\|, \forall n \geq 0.$$

Do vậy,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w^n - x^*\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - x^*\| = c. \quad (2.18)$$

Sử dụng $x^{n+1} = \alpha_n w^n + (1 - \alpha_n) \bar{S}_n(w^n)$, ta có

$$\begin{aligned} \|x^{n+1} - x^*\|^2 &= \|\alpha_n w^n + (1 - \alpha_n) \bar{S}_n(w^n) - x^*\|^2 \\ &= \|w^n - x^*\|^2 - (1 - \alpha_n)(\alpha_n - \bar{L}) \|\bar{S}_n(w^n) - w^n\|^2 \\ &\leq \|w^n - x^*\|^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Do đó,

$$c \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|w^n - x^*\|. \quad (2.20)$$

Từ (2.20) và (2.18), suy ra $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \|w^n - x^*\|$. Vì y^n là nghiệm duy nhất của bài toán lồi mạnh

$$\min \left\{ f(x^n, y) + \frac{\beta}{2} \|y - x^n\|^2 \mid y \in C \right\},$$

nên, với mỗi $y \in C$, ta có $f(x^n, y) + \frac{\beta}{2} \|y - x^n\|^2 \geq f(x^n, y^n) + \frac{\beta}{2} \|y^n - x^n\|^2$. Thay $y = x^n \in C$ và sử dụng giả thiết $f(x^n, x^n) = 0$, ta nhận được

$$0 \geq f(x^n, y^n) + \frac{\beta}{2} \|y^n - x^n\|^2. \quad (2.21)$$

Do $f(x^n, \cdot)$ lồi khả dưới vì phân trên C , nên $f(x^n, y) - f(x^n, x^n) \geq \langle u^n, y - x^n \rangle$, $\forall y \in C$, trong đó $u^n \in \partial_2 f(x^n, x^n)$. Ta thay $y = y^n$ vào trong bất đẳng thức trên, ta được

$$f(x^n, y^n) \geq \langle u^n, y^n - x^n \rangle.$$

Kết hợp bất đẳng thức này với (2.21), ta nhận được $\langle u^n, y^n - x^n \rangle + \frac{\beta}{2} \|x^n - y^n\|^2 \leq 0$.

Do vậy,

$$\left\| x^n - y^n + \frac{1}{\beta} u^n \right\| \leq \frac{1}{\beta} \|u^n\|. \quad (2.22)$$

Từ giả thiết (iv) trong Định lý 2.1 và (2.17), ta suy ra dãy $\{u^n\}$ bị chặn. Từ (2.22) suy ra dãy $\{y^n\}$ bị chặn và do đó $z^n = x^n - \gamma^{m_n}(x^n - y^n)$ cũng bị chặn. Suy ra được các dãy $\{v^n\}$ và $\{w^n\}$ cũng bị chặn.

Tiếp đến ta chứng minh tồn tại dãy con của dãy $\{x^n\}$ hội tụ đến $\bar{x} \in \cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i) \cap \text{Sol}(C, f)$ và dãy $\{x^n\}$ hội tụ đến $\bar{x}$. Thật vậy, Giả sử $\{x^{n_k}\}$ là dãy con của $\{x^n\}$ thỏa mãn $\|r(x^{n_k})\| \neq 0$. Theo kết quả ở trên và giả thiết (iv) trong Định lý 2.1, dãy lặp $\{v^n\}$ bị chặn bởi $M > 0$. Ta chứng minh rằng

$$\begin{aligned} \|x^{n_{k+1}} - x^*\|^2 &\leq \|x^{n_k} - x^*\|^2 - (1-b)\|w^{n_k+p} - \bar{y}^{n_k+p}\|^2 \\ &\quad - b(a - \bar{L})\|\bar{S}_{n_k+p}(w^{n_k+p}) - w^{n_k+p}\|^2 \\ &\quad - (1-b) \left(\frac{\gamma^{m_{n_k+p}} \sigma}{M(1 - \gamma^{m_{n_k+p}})} \right)^2 \|r(x^{n_k+p})\|^4, \end{aligned} \quad (2.23)$$

trong đó

$$p = n_{k+1} - n_k - 1, \bar{y}^{n_k+p} = Pr_{H_{n_k+p}}(x^{n_k+p}),$$

$$x^* \in \cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i) \cap \text{Sol}(C, f)$$

và $\bar{S}_n := \sum_{i=1}^p \lambda_{n,i} S_i$. Thật vậy, nếu $n_{k+1} = n_k + 1$ thì theo kết quả trên ta có điều phải chứng minh. Mặt khác, ta giả sử rằng tồn tại số nguyên dương p sao cho $n_k + p + 1 = n_{k+1}$. Ta chú ý rằng $\|r(x^{n_k+i})\| = 0$ với mọi $i = 0, 1, \dots, p-1$. Ta dùng $r(x^{n_k+p}) \neq 0$, (2.16), ta sẽ được

$$\begin{aligned} \|x^{n_{k+1}} - x^*\|^2 &= \|x^{n_k+p+1} - x^*\|^2 \\ &\leq \|x^{n_k} - x^*\|^2 - (1-b)\|w^{n_k+p} - \bar{y}^{n_k+p}\|^2 \\ &\quad - b(a - \bar{L})\|\bar{S}_{n_k+p}(w^{n_k+p}) - w^{n_k+p}\|^2 \\ &\quad - (1-b) \left(\frac{\gamma^{m_{n_k+p}} \sigma}{M(1 - \gamma^{m_{n_k+p}})} \right)^2 \|r(x^{n_k+p})\|^4. \end{aligned}$$

Vì $\{\|x^n - x^*\|\}$ hội tụ nên ta thấy rằng

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma^{m_{n_k+p}} \|r(x^{n_k+p})\| = 0.$$

Các trường hợp còn lại ta xét sau đây:

Trường hợp 1. $\limsup_{k \rightarrow \infty} \gamma^{m_{n_k+p}} > 0$. Trong trường hợp này, ta có $\liminf_{k \rightarrow \infty} \|r(x^{n_k+p})\| = 0$.

Vì $\{x^{n_k+p}\}$ bị chặn, nên tồn tại điểm tụ $\bar{x}$ of $\{x^{n_k+p}\}$. Nói cách khác, dãy con $\{x^{n_{k_j}}\}$ hội tụ đến $\bar{x}$, khi $j \rightarrow \infty$ sao cho $r(\bar{x}) = 0$. Khi đó, ta có $\bar{x} \in \text{Sol}(C, f)$.

Trường hợp 2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma^{m_{n_k+p}} = 0$. Vì $\{\|x^{n_k+p} - x^*\|\}$ hội tụ, nên tồn tại dãy con $\{x^{n_{k_j}}\}$ of $\{x^{n_k+p}\}$ hội tụ đến $\bar{x}$, khi $j \rightarrow \infty$. Do m_{n_k+p} là số nguyên không âm nhỏ nhất, nên $m_{n_k+p} - 1$ không thỏa mãn điều kiện (2.1). Do đó, ta có

$$f(x^{n_{k_j}} - \gamma^{m_{n_{k_j}}-1} r(x^{n_{k_j}}), y^{n_{k_j}}) > -\sigma \|r(x^{n_{k_j}})\|^2.$$

Lấy giới hạn hai vế cho bất đẳng thức trên, khi $j \rightarrow \infty$ và sử dụng tính liên tục của f , ta được $y^{n_{k_j}} \rightarrow \bar{y}$ và

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq -\sigma \|r(\bar{x})\|^2, \quad (2.24)$$

trong đó $r(\bar{x}) = \bar{x} - \bar{y}$. Từ (2.3) suy ra $f(x^{n_{k_j}-1} - \gamma^{m_{n_{k_j}}} r(x^{n_{k_j}}), y^{n_{k_j}-1}) + \frac{\beta}{2} \|r(x^{n_{k_j}-1})\|^2 \leq 0$. Vì f liên tục và lấy qua giới hạn cho bất đẳng thức trên, khi $j \rightarrow \infty$, ta được $f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\beta}{2} \|r(\bar{x})\|^2 \leq 0$. Kết hợp bất đẳng thức này với (2.24), ta nhận được $\sigma \|r(\bar{x})\|^2 \geq -f(\bar{x}, \bar{y}) \geq \frac{\beta}{2} \|r(\bar{x})\|^2$. Do vậy, ta suy ra $r(\bar{x}) = 0$, và $\bar{x} = \bar{y} \in \text{Sol}(C, f)$. Do đó, với mỗi điểm tụ của $\{x^{n_k+p}\}$ là nghiệm của bài toán EP(C, f).

Bây giờ, ta chứng minh mỗi điểm tụ của dãy $\{x^{n_k+p}\}$ là điểm bất động của họ p ánh xạ giả co chặt $\{S_i\}_{i=1}^p$. Giả sử tồn tại dãy con $\{x^{n_{k_j}}\}$ của dãy $\{x^{n_k+p}\}$ hội tụ đến $\bar{x}$, khi $j \rightarrow \infty$. Theo chứng minh trên, ta có $\bar{x} \in \text{Sol}(C, f)$. Do đó, $\{y^{n_{k_j}}\}$ và $\{w^{n_{k_j}}\}$ cũng hội tụ đến $\bar{x}$, khi $j \rightarrow \infty$. Với mỗi $i = 1, \dots, p$, ta giả sử rằng $\lambda_{n_{k_j}, i}$ hội tụ đến λ_i

khi $j \rightarrow \infty$ sao cho $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$. Khi đó, ta có $\bar{S}_{n_{k_j}}(x) \rightarrow S(x) := \sum_{i=1}^p \lambda_i S_i(x)$ (khi $j \rightarrow \infty$), $\forall x \in C$. Với mỗi $x^* \in \cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i) \cap \text{Sol}(C, f)$, từ (2.19) suy ra

$$(1 - \alpha_n)(\alpha_n - \bar{L}) \|\bar{S}_n(w^n) - w^n\|^2 \leq \|w^n - x^*\| - \|x^{n+1} - x^*\|^2.$$

Kết hợp bất đẳng thức này với kết quả trên, ta nhận được

$$\|\bar{S}_n(w^n) - w^n\|^2 \leq \frac{1}{(1-b)(a-\bar{L})} (\|w^n - x^*\|^2 - \|x^{n+1} - x^*\|^2) \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow \infty.$$

Khi đó, ta dùng (a) của Mệnh đề 1.3, ta được kết quả

$$\begin{aligned} \|x^{n_{k_j}} - \bar{S}_{n_{k_j}}(x^{n_{k_j}})\| &\leq \|x^{n_{k_j}} - w^{n_{k_j}}\| + \\ &\quad \|w^{n_{k_j}} - \bar{S}_{n_{k_j}}(w^{n_{k_j}})\| + \|\bar{S}_{n_{k_j}}(w^{n_{k_j}}) - \bar{S}_{n_{k_j}}(x^{n_{k_j}})\| \\ &= \frac{2}{1-\bar{L}} \|x^{n_{k_j}} - w^{n_{k_j}}\| + \|w^{n_{k_j}} - \bar{S}_{n_{k_j}}(w^{n_{k_j}})\| \rightarrow 0 \text{ khi } j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Do đó, $\bar{x} \in \text{Fix}(S)$. Khi đó, theo (e) của Mệnh đề 1.3 ta suy ra $\bar{x} \in \cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i)$. Do vậy, $\bar{x} \in \cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i) \cap \text{Sol}(C, f)$, chọn $x^* = \bar{x}$ và sử dụng kết quả ở trên, ta có

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - \bar{x}\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|x^{n_{k_j}} - \bar{x}\| = 0.$$

Ta kết luận rằng dãy $\{x^n\}$ hội tụ đến $\bar{x} \in \cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i) \cap \text{Sol}(C, f)$. Do vậy, các dãy $\{y^n\}$ và $\{w^n\}$ cũng hội tụ đến $\bar{x}$.

Ta chứng minh rằng các dãy $\{x^n\}$, $\{y^n\}$ và $\{w^n\}$ hội tụ đến $\bar{x}$, trong đó $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} Pr_{\cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i) \cap \text{Sol}(C, f)}(x^n)$.

Ta đặt $t^n := Pr_{\cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i) \cap \text{Sol}(C, f)}(x^n)$ và $x^n \rightarrow \bar{x}$ khi $n \rightarrow \infty$.

Sử dụng định nghĩa của phép chiếu $Pr_C(\cdot)$, ta có

$$\langle t^n - x^n, t^n - x \rangle \leq 0, \forall x \in \cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i) \cap \text{Sol}(C, f). \quad (2.25)$$

Ta suy ra $\|x^{n+1} - x^*\| \leq \|x^n - x^*\|, \forall n \geq 0, x^* \in \cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i) \cap \text{Sol}(C, f)$. Theo Bổ đề 1.6, ta có

$$\begin{aligned} t^n &= Pr_{\cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i) \cap \text{Sol}(C, f)}(x^n) \\ &\rightarrow x_1 \in \cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i) \cap \text{Sol}(C, f) \text{ khi } n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Từ (2.25) và (2.26), ta suy ra $\langle x_1 - \bar{x}, x_1 - x \rangle \leq 0, \forall x \in \cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i) \cap \text{Sol}(C, f)$. Do đó, $\bar{x} = x_1$ và $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} Pr_{\cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i) \cap \text{Sol}(C, f)}(x^n)$. Từ đó, suy ra các dãy $\{x^n\}, \{y^n\}$ và $\{w^n\}$ hội tụ đến $\bar{x}$, trong đó $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} Pr_{\cap_{i=1}^p \text{Fix}(S_i) \cap \text{Sol}(C, f)}(x^n)$.

Tài liệu tham khảo

- [1] G.L. Acedo, H.K. Xu (2007), "Iterative methods for strict pseudocontractions in Hilbert", *Nonlinear Analysis*, 67, pp. 2258-2271.
- [2] P.N. Anh, N.D. Hien (2014), "Fixed point solution methods for solving equilibrium problems", *Bull. Korean Math. Soc.*, 51, pp. 479-499.
- [3] P.N. Anh, N.D. Hien (2012), "A projection method for pseudomonotone equilibrium problems", *Far East J. of Applied Mathematics*, 65, pp. 37-50.
- [4] N.D. Hien, N.V. Hong and J.K. Kim (2024), "Auxiliary problem principle extended to equilibrium problems over the intersection of fixed point set", *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, Volume 25, Number 11, pp. 2691-2702.
- [5] S. Takahashi, M. Toyoda (2003), "Weakly convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings", *J. Optim. Theory Appl.*, 118, pp. 417-428.