TẠP CHÍ KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ ĐẠI HỌC DUY TÂN
DTU Journal of Science and Technology 01(68) (2025) 99-108
ĐẠI HỌC DUY TÂN
DUYTAN UNIVERSITY

Định lý kiểu Liouville cho hệ bất phương trình elliptic suy biến

A Liouville type theorem for systems of degenerate elliptic inequalities

Phan Quốc Hưng[a,b*], Nguyễn Đắc Nhân[b]
Phan Quoc Hung[a,b*], Nguyen Dac Nhan[b]

[a]*Viện Nghiên cứu và Phát triển Công nghệ Cao, Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam*
[a]*Institute of Research and Devolopment, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Vietnam*
[b]*Khoa Môi trường và Khoa học Tự nhiên, Trường Công nghệ và Kỹ thuật, Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam*
[b]*Faculty of Environment and Natural Sciences, School of Engineering and Technology, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Vietnam*

(Ngày nhận bài: 17/01/2025, ngày phản biện xong: 17/02/2025, ngày chấp nhận đăng: 18/02/2025)

Tóm tắt

Chúng tôi nghiên cứu sự không tồn tại nghiệm dương của hệ bất phương trình suy biến

$$\begin{cases} -G_\alpha u \geq v^p \\ -G_\alpha v \geq u^q \end{cases}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} = \mathbb{R}^N,$$

với $p, q \in \mathbb{R}$ và G_α là toán tử Grushin. Với $N_\alpha = N_1 + (1+\alpha)N_2$ số chiều thuần nhất của $\mathbb{R}^N$ tương ứng với toán tử G_α, chúng tôi thiết lập sự không tồn tại nghiệm dương cổ điển của hệ trong các trường hợp sau:

- $p \leq 0$ hoặc $q \leq 0$,
- $p, q > 0$ và $pq \leq 1$,
- $p, q > 0$, $pq > 1$ và $\max\left\{\frac{2(p+1)}{pq-1}, \frac{2(q+1)}{pq-1}\right\} \geq N_\alpha - 2$.

Từ khóa: định lý Liouville; toán tử Grushin; nghiệm trên

Abstract

We study the nonexistence of positive solutions to the degenerate elliptic system of inequalities

$$\begin{cases} -G_\alpha u \geq v^p \\ -G_\alpha v \geq u^q \end{cases}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} = \mathbb{R}^N,$$

where $p, q \in \mathbb{R}$ and G_α is the Grushin operator. Let $N_\alpha = N_1 + (1+\alpha)N_2$ be the homogeneous dimension of $\mathbb{R}^N$ associated with the operator G_α. We establish the nonexistence of positive classical solutions of the system under the following cases:

- $p \leq 0$ or $q \leq 0$,
- $p, q > 0$ and $pq \leq 1$,
- $p, q > 0$, $pq > 1$ and $\max\left\{\frac{2(p+1)}{pq-1}, \frac{2(q+1)}{pq-1}\right\} \geq N_\alpha - 2$.

Keywords: Liouville-type theorem; Grushin operator; supersolutions

Tác giả liên hệ: Phan Quốc Hưng
Email: hungpqmath@gmail.com

1. Mở đầu

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu hệ bất phương trình

$$\begin{cases} -G_\alpha u \geq v^p \\ -G_\alpha v \geq u^q \end{cases}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} = \mathbb{R}^N \tag{1}$$

và bất phương trình tương ứng

$$-G_\alpha w \geq w^p, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}, \tag{2}$$

với $G_\alpha u = \Delta_x u + |x|^{2\alpha}\Delta_y u$ là toán tử Grushin, Δ_x và Δ_y là các toán tử Laplace tương ứng với các biến $x \in \mathbb{R}^{N_1}$ và $y \in \mathbb{R}^{N_2}$. Chúng tôi luôn giả thiết rằng $\alpha \geq 0$, hai số mũ p, q là các số thực.

Khi $\alpha = 0$, G_α là toán tử Laplace. Khi $\alpha > 0$, G_α là elliptic với $|x| \neq 0$ và suy biến trên đa tạp $\{0\} \times \mathbb{R}^{N_2}$. Toán tử này được đưa ra trong [7] và đã thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Dễ thấy rằng G_α thuộc vào lớp toán tử dưới-elliptic được nghiên cứu bởi Franchi và cộng sự trong [5].

Trong bài báo này, nghiệm của bài toán được xét là nghiệm dương cổ điển. Chúng tôi quan tâm đến sự tồn tại của nghiệm dương cổ điển trong toàn bộ không gian $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$. Chúng tôi nhắc lại một số kết quả đã biết về định lý Liouville cho bất phương trình (2). Trường hợp $\alpha = 0$ đã được giải quyết hoàn toàn trong [2, Định lý 2.1], ở đó khoảng tối ưu cho sự không tồn tại của nghiệm là $-\infty < p \leq \frac{N}{N-2}$ ($p \in \mathbb{R}$ nếu $N \leq 2$). Hơn nữa, khi $\alpha = 0$ và $p > \frac{N}{N-2}$, bài toán (2) có nghiệm dương ở dạng tường minh

$$u(x, y) = k(1 + |x|^2 + |y|^2)^{-1/(p-1)}. \tag{3}$$

Khi $\alpha > 0$, D'Ambrosio và Lucente [4, Định lý 3.2] đã sử dụng phương pháp hàm thử để thiết lập định lý Liouville cho bài toán (2) với điều kiện $1 < p \leq \frac{N_\alpha}{N_\alpha - 2}$, với

$$N_\alpha := N_1 + (1 + \alpha)N_2$$

là số chiều thuần nhất. Kết quả Liouville sau đây đã được thiết lập ([4, Định lý 3.2]).

Định lý 1. *Giả sử $-\infty < p \leq \frac{N_\alpha}{N_\alpha - 2}$. Khi đó bài toán (2) không có nghiệm dương cổ điển.*

Về định lý Liouville cho hệ (1), trường hợp $\alpha = 0$ đã được chứng minh bởi Armstrong và Sirakov trong [2, Mục 6.2] bằng lí luận nguyên lí cực đại. Một cách rõ hơn, họ đã chỉ ra rằng bài toán (1) không có nghiệm dương nếu (p, q) nằm trong các miền sau:

- $p \leq 0$ hoặc $q \leq 0$,
- $p, q > 0$ và $pq \leq 1$,
- $p, q > 0, pq > 1$ và $\max\left\{\frac{2(p+1)}{pq-1}, \frac{2(q+1)}{pq-1}\right\} \geq N - 2$.

Ngoài ra, khi $p, q > 0, pq > 1$ và $\max\left\{\frac{2(p+1)}{pq-1}, \frac{2(q+1)}{pq-1}\right\} < N - 2$, bài toán (1) với $\alpha = 0$ có nghiệm dương dạng

$$u(x, y) = k_1\Big((1 + |x|^2 + |y|^2\Big)^{-\frac{p+1}{pq-1}}, \; v(x, y) = k_2\Big((1 + |x|^2 + |y|^2\Big)^{\frac{q+1}{pq-1}}.$$

Đối với hệ (1) trong trường hợp tổng quát $\alpha \geq 0$, định lý Liouville vẫn còn ít được biết đến. Gần đây, các tác giả trong [1] đã sử dụng phương pháp hàm thử để thiết lập định lý Liouville cho bài toán (1) với điều kiện

$$p, q > 1 \text{ và } \max\left\{\frac{2(p+1)}{pq-1}, \frac{2(q+1)}{pq-1}\right\} \geq N_\alpha - 2.$$

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh sự không tồn tại nghiệm với các điều kiện của p và q được mở rộng hơn. Kết quả chính của chúng tôi là:

Định lý 2. *Hệ* (1) *không có nghiệm dương cổ điển trong các trường hợp sau:*

- $p \leq 0$ *hoặc* $q \leq 0$,
- $p, q > 0$ *và* $pq \leq 1$,
- $p, q > 0$, $pq > 1$ *và* $\max\left\{\frac{2(p+1)}{pq-1}, \frac{2(q+1)}{pq-1}\right\} \geq N_\alpha - 2$.

Chứng minh của Định lý 2 sử dụng nhiều công cụ khác nhau tùy thuộc vào cặp số mũ (p, q). Nhiều khó khăn nảy sinh khi $p \leq 1$ hoặc $q \leq 1$ khi ta không thể sử dụng phương pháp hàm thử. Chúng tôi đưa ra phương pháp mới để quy về bất phương trình và sử dụng kết quả của Định lý 1. Trường hợp khó nhất trong định lý là khi $p, q > 0$, $pq > 1$ và $\max\left\{\frac{2(p+1)}{pq-1}, \frac{2(q+1)}{pq-1}\right\} = N_\alpha - 2$ do phương pháp quy về bất phương trình không thể sử dụng được. Chúng tôi sử dụng ý tưởng của Serrin và Zou trong [10] để vượt qua khó khăn này.

2. Một số bổ đề bổ trợ

Ta kí hiệu $z = (x, y)$ là một điểm trong $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$, $\nabla = (\nabla_x, \nabla_y)$ và $\nabla_G = (\nabla_x, |x|^\alpha \nabla_y)$. Chuẩn của z được xác định bởi

$$\|z\|_G = \left(|x|^{2(1+\alpha)} + (1+\alpha)|y|^2\right)^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}.$$

Khi đó, hàm

$$\Gamma(z, z_0) = \|z - z_0\|_G^{2-N_\alpha} \tag{4}$$

là nghiệm cơ bản của G_α với kì dị tại z_0, xem [6].

Hình cầu mở và mặt cầu tâm z_0 bán kính r lần lượt được xác định bởi

$$\mathcal{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{R}^N; \|z - z_0\|_G < r\}$$

và

$$\partial\mathcal{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{R}^N; \|z - z_0\|_G = r\}.$$

Khi $z_0 = 0$, ta viết $\mathcal{B}_r$ và $\partial\mathcal{B}_r$.

Ta kí hiệu hàm trọng

$$W(z) := \frac{|x|^{2\alpha}}{\|z\|_G^{2\alpha}} = |\nabla_G(\|z\|_G)|^2. \tag{5}$$

Chú ý rằng

$$0 \leq W(z) \leq 1 \text{ và } W(0, y) = 0, W(x, 0) = 1.$$

Đặt

$$|\mathcal{B}_r| = \int_{\mathcal{B}_r} W(z)dz,$$

Bằng cách sử dụng hệ tọa độ cực [3, 11], tồn tại hằng số $C_{N,\alpha} > 0$ phụ thuộc vào N_α và α sao cho

$$|\mathcal{B}_r| = C_{N,\alpha} r^{N_\alpha}. \tag{6}$$

Ngoài ra, công thức đồng diện (xem [6, Công thức 2.4]) cho ta thấy

$$|\mathcal{B}_r| = \int_{\mathcal{B}_r} W(z)dz = \int_0^r ds \int_{\partial\mathcal{B}_s} \frac{W(z)}{|\nabla(\|z\|_G)|} dH_{N-1},$$

với dH_{N-1} là độ đo Hausdorff $(N-1)$ chiều trong $\mathbb{R}^N$. Kí hiệu

$$|\partial\mathcal{B}_r| := \frac{d}{dr}|\mathcal{B}_r| = \int_{\partial\mathcal{B}_r} \frac{W(z)}{|\nabla(\|z\|_G)|} dH_{N-1} = C_{N,\alpha} N_\alpha r^{N_\alpha - 1}.$$

Sử dụng ý tưởng của Garofalo và Lanconelli [6], ta có thể định nghĩa hàm trung bình cầu của $V \in C(\mathbb{R})$ như sau:

$$\overline{V}(r) = \frac{1}{|\partial\mathcal{B}_r|} \int_{\partial\mathcal{B}_r} V(z) \frac{W(z)}{|\nabla(\|z\|_G)|} dH_{N-1}, \text{ for } r > 0. \tag{7}$$

Chú ý rằng khi $\alpha = 0$, công thức trên chính là công thức trung bình cầu quen thuộc trên hình cầu Euclide.

Mệnh đề 2.1. *Giả sử $V \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Khi đó với mỗi $r > 0$ ta có*

$$\overline{V}(r) = V(0) + \tilde{c}(N_\alpha, \alpha) \int_{\mathcal{B}_r} G_\alpha V(z) \left(\Gamma(z,0) - r^{2-N_\alpha}\right) dz, \tag{8}$$

với $\tilde{c}^{-1}(N_\alpha, \alpha) = C_{N,\alpha} N_\alpha (N_\alpha - 2)$, $C_{N,\alpha}$ và $\Gamma(z,0)$ được cho trong (6) *và* (4).

Chứng minh. Với mỗi $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ, sử dụng công thức tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned} &-\int_{\mathcal{B}_r\setminus\mathcal{B}_\varepsilon} \left(G_\alpha V(z)\Gamma(z,0) - V(z) G_\alpha \Gamma(z,0)\right) dz \\ &= \int_{\partial(\mathcal{B}_r\setminus\mathcal{B}_\varepsilon)} \left((\nabla_x + |x|^{2\alpha}\nabla_y)V(z)\Gamma(z,0) - V(z)(\nabla_x + |x|^{2\alpha}\nabla_y)\Gamma(z,0)\right).\nu dH_{N-1}, \end{aligned} \tag{9}$$

với ν véc tơ pháp tuyến đơn vị ngoài của $\partial(\mathcal{B}_r \setminus \mathcal{B}_\varepsilon)$.

Nhắc lại rằng $\Gamma(z,0) = \|z\|_G^{2-N_\alpha}$. Ta xét số hạng thứ nhất ở vế phải của (9)

$$\begin{aligned} &\int_{\partial(\mathcal{B}_r\setminus\mathcal{B}_\varepsilon)} (\nabla_x + |x|^{2\alpha}\nabla_y)V(z)\Gamma(z,0).\nu dH_{N-1} \\ &= \int_{\partial\mathcal{B}_r} (\nabla_x + |x|^{2\alpha}\nabla_y)V(z)\Gamma(z,0).\nu dH_{N-1} + \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} (\nabla_x + |x|^{2\alpha}\nabla_y)V(z)\Gamma(z,0).\nu dH_{N-1} \\ &= r^{2-N_\alpha} \int_{\partial\mathcal{B}_r} (\nabla_x + |x|^{2\alpha}\nabla_y)V(z).\nu dH_{N-1} + \varepsilon^{2-N_\alpha} \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} (\nabla_x + |x|^{2\alpha}\nabla_y)V(z).\nu dH_{N-1} \\ &= -r^{2-N_\alpha} \int_{\mathcal{B}_r} G_\alpha V(z) dz + \varepsilon^{2-N_\alpha} \int_{\mathcal{B}_\varepsilon} G_\alpha V(z) dz, \end{aligned} \tag{10}$$

trong đó ở đẳng thức cuối, ta sử dụng công thức tích phân từng phần và $\nu = \frac{\nabla\|z\|_G}{|\nabla(\|z\|_G)|}$ on $\partial\mathcal{B}_r$ và $\nu = -\frac{\nabla\|z\|_G}{|\nabla(\|z\|_G)|}$ on $\partial\mathcal{B}_\varepsilon$. Mặt khác, bằng tính toán và (5) ta có

$$\begin{aligned} (\nabla_x + |x|^{2\alpha}\nabla_y)\Gamma(z,0).\frac{\nabla\|z\|_G}{|\nabla(\|z\|_G)|} &= (2 - N_\alpha)\|z\|_G^{1-N_\alpha} \frac{|\nabla_G(\|z\|_G)|^2}{|\nabla(\|z\|_G)|} \\ &= (2 - N_\alpha)\|z\|_G^{1-N_\alpha} \frac{W(z)}{|\nabla(\|z\|_G)|}. \end{aligned} \tag{11}$$

Thay (11) vào số hạng thứ hai trong (9) ta được

$$\begin{aligned} &\int_{\partial(\mathcal{B}_r\setminus\mathcal{B}_\varepsilon)} V(z)(\nabla_x + |x|^{2\alpha}\nabla_y)\Gamma(z,0).\nu dH_{N-1} = \\ &(2 - N_\alpha) r^{1-N_\alpha} \int_{\partial\mathcal{B}_r} V(z) \frac{W(z)}{|\nabla(\|z\|_G)|} dH_{N-1} - (2 - N_\alpha)\varepsilon^{1-N_\alpha} \int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} V(z) \frac{W(z)}{|\nabla(\|z\|_G)|} dH_{N-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Thay (10) và (12) vào trong (9) và sử dụng $\Gamma(z,0)$ là nghiệm cơ bản của G_α ta được

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathcal{B}_r\setminus\mathcal{B}_\varepsilon} G_\alpha V(z)\Gamma(z,0)dz &= -r^{2-N_\alpha}\int_{\mathcal{B}_r} G_\alpha V(z)dz + \varepsilon^{2-N_\alpha}\int_{\mathcal{B}_\varepsilon} G_\alpha V(z)dz \\
&+ (2-N_\alpha)r^{1-N_\alpha}\int_{\partial\mathcal{B}_r} V(z)\frac{W(z)}{|\nabla(\|z\|_G)|}dH_{N-1} - (2-N_\alpha)\varepsilon^{1-N_\alpha}\int_{\partial\mathcal{B}_\varepsilon} V(z)\frac{W(z)}{|\nabla(\|z\|_G)|}dH_{N-1}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Nhắc lại rằng $|\partial\mathcal{B}_r| = C_{N,\alpha}N_\alpha r^{N_\alpha-1}$. Cho $\varepsilon \to 0^+$ ở (13), ta có

$$\begin{aligned}
-\int_{\mathcal{B}_r} G_\alpha V(z)\Gamma(z,0)dz &= -r^{2-N_\alpha}\int_{\mathcal{B}_r} G_\alpha V(z)dz \\
&- C_{N,\alpha}(N_\alpha-2)N_\alpha\left(\frac{1}{|\partial\mathcal{B}_r|}\int_{\partial\mathcal{B}_r} V(z)\frac{W(z)}{|\nabla(\|z\|_G)|}dH_{N-1} - V(0)\right).
\end{aligned} \tag{14}$$

Cuối cùng, từ (14) và (7) ta suy ra (8).

Mệnh đề 2.2. *Giả sử $V \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Khi đó với $r > 0$ ta có*

$$r^{N_\alpha-1}\overline{V}'(r) = \frac{1}{C_{N,\alpha}N_\alpha}\int_{\mathcal{B}_r} G_\alpha V(z)dz. \tag{15}$$

Chứng minh. Sử dụng công thức đồng diện ta có

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{B}_r} G_\alpha V(z)\left(\Gamma(z,0) - r^{2-N_\alpha}\right)dz \\
&\quad = \int_0^r ds\int_{\partial\mathcal{B}_s} \frac{G_\alpha V(z)}{|\nabla(\|z\|_G)|}\left(\Gamma(z,0) - r^{2-N_\alpha}\right)dH_{N-1}ds.
\end{aligned}$$

Kết hợp với (8) ta có

$$\begin{aligned}
\overline{V}'(r) =& \tilde{c}(N_\alpha,\alpha)\int_{\partial\mathcal{B}_r} \frac{G_\alpha V(z)}{|\nabla(\|z\|_G)|}\left(\Gamma(z,0) - r^{2-N_\alpha}\right)dH_{N-1} \\
&+ \tilde{c}(N_\alpha,\alpha)\int_0^r ds\int_{\partial\mathcal{B}_s} \frac{G_\alpha V(z)}{|\nabla(\|z\|_G)|}\left((N_\alpha-2)r^{1-N_\alpha}\right)dH_{N-1}ds \\
=& \tilde{c}(N_\alpha,\alpha)(N_\alpha-2)\int_0^r ds\int_{\partial\mathcal{B}_s} \frac{G_\alpha V(z)}{|\nabla(\|z\|_G)|}r^{1-N_\alpha}dH_{N-1}ds,
\end{aligned}$$

trong đó ở đẳng thức cuối cùng, ta sử dụng $\Gamma(z,0) = \|z\|_G^{2-N_\alpha} = r^{2-N_\alpha}$ trên $\partial\mathcal{B}_r$. Áp dụng công thức đồng diện ta có

$$\overline{V}'(r) = \tilde{c}(N_\alpha,\alpha)(N_\alpha-2)r^{1-N_\alpha}\int_{\mathcal{B}_r} G_\alpha V(z)dz.$$

Cuối cùng, từ $\tilde{c}(N_\alpha,\alpha)(N_\alpha-2) = \frac{1}{C_{N,\alpha}N_\alpha}$, ta suy ra điều phải chứng minh.

3. Chứng minh Định lý 2

Chú ý rằng khi $p = 0$ hoặc $q = 0$, hệ (1) không có nghiệm dương cổ điển (xem Định lý 1). Kể từ đây, ta luôn giả thiết $p \neq 0$ và $q \neq 0$. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng

$$p \geq q.$$

Trường hợp 1: $p, q < 0$. Giả sử (u, v) là nghiệm dương của (1).

Đặt $w = u + v$, ta có

$$-G_\alpha(w) \geq u^p + v^q. \tag{16}$$

Đặt $s = |\frac{2pq}{p+q}| > 0$. Tiếp theo ta chỉ ra rằng

$$u^p + v^q \geq \frac{C}{(u+v)^s}, C > 0. \tag{17}$$

Thật vậy, từ bất đẳng thức Young ta có

$$\frac{1}{(u+v)^s} \leq \frac{1}{2(uv)^{\frac{s}{2}}} \leq C\left(u^{-\frac{sm}{2}} + v^{-\frac{s(m)}{2(m-1)}}\right), \tag{18}$$

với $m = \frac{|p+q|}{|q|} > 1$. Dễ thấy rằng

$$\frac{sm}{2} = |\frac{pq}{p+q}|\frac{|p+q|}{|q|} = |p| = -p \text{ and } \frac{sm}{2(m-1} = |q| = -q.$$

Kết hợp với (18) ta suy ra (17).

Từ (16) và (17), w là nghiệm dương cổ điển của

$$-G_\alpha(w) \geq Cw^{-s}.$$

Điều này trái với Định lý 1.

Trường hợp 2: Nếu p và q thỏa mãn một trong các điều kiện

1. $q < 0 < p$.
2. $p, q > 0$ và $pq < 1$.
3. $p, q > 0$, $pq > 1$ và $\max\left(\frac{2(p+1)}{pq-1}, \frac{2(q+1)}{pq-1}\right) > N_\alpha - 2$.

Đặt $w = u^a v^b$ với $a, b > 0$ và $a + b = 1$. Tính toán trực tiếp ta có

$$\begin{aligned}-G_\alpha w \geq & -au^{a-1}G_\alpha u - bv^{b-1}G_\alpha v \\ & + a(1-a)|\nabla_G u|^2 u^{a-2}v^b + b(1-b)|\nabla_G v|^2 v^{b-2}u^a - 2ab\nabla_G u.\nabla_G v u^{a-1}v^{b-1}.\end{aligned} \tag{19}$$

Sử dụng bất đẳng thức Young cho vế phải của (19) và sử dụng $(1-a)(1-b) = ab$ ta có

$$-G_\alpha w \geq -au^{a-1}G_\alpha u - bv^{b-1}G_\alpha v \geq au^{a-1}v^p + bv^{b-1}u^q = u^a v^b\left(a\frac{v^p}{u} + b\frac{u^q}{v}\right). \tag{20}$$

Từ bất đẳng thức Young suy ra

$$a\frac{v^p}{u} + b\frac{u^q}{v} \geq C\left(\frac{v^p}{u}\right)^{\frac{1}{m}}\left(\frac{u^q}{v}\right)^{\frac{m-1}{m}}, m > 1 \text{ được chọn như bên dưới.} \tag{21}$$

Từ (20) và (21) ta có

$$-G_\alpha w \geq Cu^{a-\frac{1}{m}+q\frac{m-1}{m}}v^{b-\frac{m-1}{m}+\frac{p}{m}}. \tag{22}$$

Ta chọn hằng số m sao cho

$$\frac{a - \frac{1}{m} + q\frac{m-1}{m}}{b - \frac{m-1}{m} + \frac{p}{m}} = \frac{a}{b}.$$

Khi đó
$$m = 1 + \frac{ap+b}{bq+a}. \tag{23}$$
Chú ý rằng $m > 1$ khi p và q thỏa mãn (ii) và (iii). Nếu p và q thỏa mãn (i), ta chỉ cần chọn a, b sao cho $bq + a > 0$ để đảm bảo $m > 1$.

Thay (23) vào trong (22), ta có
$$-G_\alpha w \geq C w^{1+\frac{pq-1}{a(p+1)+b(q+1)}} \tag{24}$$
Nếu p và q thỏa mãn (i) hoặc (ii), số mũ $1 + \frac{pq-1}{a(p+1)+b(q+1)}$ sẽ nhỏ hơn 1. Trong trường hợp (iii), ta chọn a, b sao cho
$$1 + \frac{pq-1}{a(p+1)+b(q+1)} \leq \frac{N_\alpha}{N_\alpha - 2}.$$
Do đó, (24) mâu thuẫn với Định lý 1.

Trường hợp 3: $p, q > 0$ và $pq = 1$.

Ta lí luận tương tự trường hợp thứ hai, nhưng ước lượng (21) được thay thế bằng
$$a\frac{v^p}{u} + b\frac{u^q}{v} = a\frac{v^p}{u} + b\frac{u^{\frac{1}{p}}}{v} \geq C\left(\frac{v^p}{u}\right)^{\frac{1}{p+1}}\left(\frac{u^q}{v}\right)^{\frac{p}{p+1}} = C.$$
Kết hợp với (20) ta có
$$-G_\alpha w \geq Cw.$$
Điều này mâu thuẫn với Định lý 1.

Trường hợp 4: $p, q > 0, pq > 1$ và $\max\left(\frac{2(p+1)}{pq-1}, \frac{2(q+1)}{pq-1}\right) = N_\alpha - 2$.

Bằng cách sử dụng phương pháp hàm thử, ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh khi p và q thỏa mãn thêm điều kiện $p, q > 1$.

Do đó ta có thể giả thiết $0 < q \leq 1 < p$. Khi đó
$$\max\left(\frac{2(p+1)}{pq-1}, \frac{2(q+1)}{pq-1}\right) = \frac{2(p+1)}{pq-1} = N_\alpha - 2.$$
Giả sử rằng (u, v) là nghiệm dương cổ điển của (1). Để chứng minh mâu thuẫn, ta cần bổ đề sau:

Bổ đề 3.1. *Giả sử $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Với bất kì $0 < \gamma < 1$, ta luôn có hằng số $c = c(\gamma) > 0$ sao cho*
$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_G u|^2 u^{\gamma-2}\chi^2 dz \leq c\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_G \chi|^2 u^\gamma dz \tag{25}$$
Chứng minh. Từ bất phương trình thứ nhất của (1) ta có
$$-G_\alpha u \geq 0.$$
Nhân với $u^{\gamma-1}\chi^2$ và lấy tích phân trên $\mathbb{R}^N$ ta có
$$(1-\gamma)\int_{\mathbb{R}^N} \chi^2 |\nabla_G u|^2 u^{\gamma-2} dz - 2\int_{\mathbb{R}^N} \chi u^{\gamma-1}\nabla_G u.\nabla_G \chi dz \leq 0.$$
Khi đó,
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \chi^2 |\nabla_G u|^2 u^{\gamma-2} dz &\leq \frac{2}{(1-\gamma)}\int_{\mathbb{R}^N} \chi u^{\gamma-1}|\nabla_G u||\nabla_G \chi| dz \\ &\leq \frac{2}{(1-\gamma)}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi^2 |\nabla_G u|^2 u^{\gamma-2} dz\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_G \chi|^2 u^\gamma dz\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$
Rút gọn ước lượng trên ta có điều phải chứng minh cho Bổ đề 3.1

Quay lại với chứng minh Định lý 2, đặt $w = u^a$ với $0 < a < 1$. Tính toán trực tiếp ta có,

$$-G_\alpha w = -aG_\alpha u u^{a-1} - a(a-1)|\nabla_G u|^2 u^{a-2} \geq a u^{a-1} v^p = a w^{\frac{a-1}{a}} v^p. \tag{26}$$

Lấy $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N; [0,1])$ là hàm thỏa mãn $\chi = 1$ trên $\mathcal{B}_1$ và $\chi = 0$ ngoài $\mathcal{B}_2$. Đặt $\phi(x) = \chi^m(x)$, với $m > 0$ sẽ được chọn sau. Khi đó, tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho

$$|G_\alpha \phi| \leq C\phi^{\frac{m-2}{m}} \text{ and } \frac{|\nabla_G \phi|}{\phi} \leq C\phi^{\frac{m-2}{m}}. \tag{27}$$

Đặt

$$\phi_r(x) = \phi\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r^{1+\alpha}}\right).$$

Nhân (26) với ϕ_r và lấy tích phân trên $\mathcal{B}_{2r}$ ta có

$$\frac{1}{r^2}\int_{\mathcal{B}_{2r}} w|G_\alpha \phi_r|dz \geq C\int_{\mathcal{B}_{2r}} w^{\frac{a-1}{a}} v^p \phi_r dz \geq C\left(\int_{\mathcal{B}_{2r}} v\phi_r dz\right)^p \left(\int_{\mathcal{B}_{2r}} w^{\frac{1-a}{a(p-1)}} \phi_r^{\frac{m-2}{m}} dz\right)^{1-p}, \tag{28}$$

ở đó ta đã sử dụng bất đẳng thức Hölder và $0 \leq \phi_r \leq 1$ trong ước lượng cuối cùng. Chọn $a = \frac{1}{p}$, ta có

$$\frac{1}{r^2}\int_{\mathcal{B}_{2r}} w|G_\alpha \phi_r|dz \geq C\left(\int_{\mathcal{B}_{2r}} v\phi_r dz\right)^p \left(\int_{\mathcal{B}_{2r}} w\phi_r^{\frac{m-2}{m}} dz\right)^{1-p}.$$

Kết hợp với (27) ta suy ra

$$\frac{1}{r^{\frac{2}{p}}}\int_{\mathcal{B}_{2r}} w\phi_r^{\frac{m-2}{m}} dz \geq C\int_{\mathcal{B}_{2r}} v\phi_r dz. \tag{29}$$

Mặt khác, nhân bất phương trình thứ hai của (1) với $\phi_r^{\frac{m+2}{m}}$ và lấy tích phân trên $\mathcal{B}_{2r}$, ta được

$$\frac{1}{r^2}\int_{\mathcal{B}_{2r}} v\phi_r dz \geq C\frac{1}{r^2}\int_{\mathcal{B}_{2r}} v|G_\alpha \phi_r|dz \geq C\int_{\mathcal{B}_{2r}} u^q \phi_r^{\frac{m+2}{m}} dz. \tag{30}$$

Từ bất đẳng thức Hölder suy ra

$$\left(\int_{\mathcal{B}_{2r}} u^{\frac{1}{p}} \phi_r^{\frac{m-2}{m}} dz\right)^{pq} \leq Cr^{N_\alpha(pq-1)}\int_{\mathcal{B}_{2r}} u^q \phi_r^{\frac{(m-2)pq}{m}} dz \tag{31}$$

Chọn $\frac{(m-2)pq}{m} = \frac{m+2}{m}$ hay $m = \frac{2(pq+1)}{pq-1}$, vế phải của (31) bằng

$$Cr^{N_\alpha(pq-1)}\int_{\mathcal{B}_{2r}} u^q \phi_r^{\frac{m-2}{m}} dz.$$

Kết hợp với (29), (30) và (31) ta có

$$\int_{\mathcal{B}_r} u^{\frac{1}{p}} dz \leq \int_{\mathcal{B}_{2r}} u^{\frac{1}{p}} \phi_r^{\frac{m-2}{m}} dz \leq Cr^{N_\alpha - \frac{2(p+1)}{p(pq-1)}}, \tag{32}$$

với C không phụ thuộc vào r.

Tiếp theo ta sử dụng phương pháp lặp để tăng số mũ trong (32) từ $\frac{1}{p}$ lên 1. Áp dụng bất đẳng thức Sobolev (xem [9, 8]), ta có

$$\|u^\gamma \phi_r\|^2_{L^{\frac{2N_\alpha}{N_\alpha-2}}(\mathcal{B}_{2r})} \leq C\int_{\mathcal{B}_{2r}} |\nabla_G(u^\gamma \phi_r)|^2 dz \text{ with } \gamma = \frac{1}{2p}. \tag{33}$$

Ngoài ra, sử dụng bất đẳng thức Young và (25), ta được

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{B}_{2r}} |\nabla_G(u^\gamma \phi_r)|^2 dz &\le C\left(\int_{\mathcal{B}_{2r}} |\nabla_G(u^\gamma)|^2 \phi_r^2 dz + \frac{1}{r^2}\int_{\mathcal{B}_{2r}} u^{2\gamma}|\nabla_G \phi_r)|^2 dz\right)\\ &\le \frac{C}{r^2}\int_{\mathcal{B}_{2r}} u^{2\gamma}|\nabla_G\phi_r)|^2 dz \le \frac{C}{r^2}\int_{\mathcal{B}_{2r}} u^{2\gamma} dz = \frac{C}{r^2}\int_{\mathcal{B}_{2r}} u^{\frac{1}{p}} dz.\end{aligned}$$

Điều này kết hợp với (32), (33) ta có

$$\|u^\gamma \phi_r\|^2_{L^{\frac{2N_\alpha}{N_\alpha-2}}(\mathcal{B}_{2r})} \le C r^{N_\alpha - 2 - \frac{2(p+1)}{pq-1}}.$$

Suy ra,

$$\|u^\gamma\|^2_{L^{\frac{2N_\alpha}{N_\alpha-2}}(\mathcal{B}_{r})} \le \|u^\gamma \phi_r\|^2_{L^{\frac{2N_\alpha}{N_\alpha-2}}(\mathcal{B}_{2r})} \le C r^{N_\alpha - 2 - \frac{2(p+1)}{pq-1}},$$

và do đó

$$\int_{\mathcal{B}_r} u^{\frac{N_\alpha}{p(N_\alpha-2)}} dz \le C r^{N_\alpha - \frac{2(p+1)N_\alpha}{(pq-1)(N_\alpha-2)}}.$$

Với k là số nguyên dương sao cho

$$\frac{N_\alpha^{k-1}}{p(N_\alpha-2)^{k-1}} < 1 \le \frac{N_\alpha^k}{p(N_\alpha-2)^k}.$$

Lặp lại lí luận trên k lần ta có

$$\int_{\mathcal{B}_r} u^{\frac{N_\alpha^k}{p(N_\alpha-2)^k}} dz \le C r^{N_\alpha - \frac{2(p+1)N_\alpha^k}{(pq-1)(N_\alpha-2)^k}}.$$

Suy ra,

$$\int_{\mathcal{B}_r} u dz \le C r^{N_\alpha - \frac{2(p+1)N_\alpha^k}{(pq-1)(N_\alpha-2)^k}}.$$

Để ý rằng $\frac{2(p+1)}{pq-1} = N_\alpha - 2$, ta thu được

$$\int_{\mathcal{B}_r} u dz \le C r^{N_\alpha - \frac{N_\alpha^k}{(N_\alpha-2)^{k-1}}}. \quad (34)$$

Cho $r \to +\infty$, vế phải của (34) tiến đến 0 vì $N_\alpha - \frac{N_\alpha^k}{(N_\alpha-2)^{k-1}} < 0$. Điều này mâu thuẫn với $u > 0$.

Tài liệu tham khảo

[1] Cung The Anh and Bui Kim My. (2016). Liouville-type theorems for elliptic inequalities involving the Δλ-Laplace operator. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 61(7):1002–1013.

[2] Scott N. Armstrong and Boyan Sirakov. (2011). Nonexistence of positive supersolutions of elliptic equations via the maximum principle. *Comm. Partial Differential Equations*, 36(11):2011–2047.

[3] Lorenzo D'Ambrosio. (2004). Hardy inequalities related to Grushin type operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(3):725–734.

[4] Lorenzo D'Ambrosio and Sandra Lucente. (2003). Nonlinear Liouville theorems for Grushin and Tricomi operators. *J. Differential Equations*, 193(2):511–541.

[5] Bruno Franchi, Cristian E. Gutiérrez, and Richard L. (1994). Wheeden.Weighted Sobolev-Poincaré inequalities for Grushin type operators. *Comm. Partial Differential Equations*, 19(3-4):523–604.

[6] N. Garofalo and E. Lanconelli. (1990). Frequency functions on the Heisenberg group, the uncertainty principle and unique continuation. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 40(2):313–356.

[7] V. V. Grushin. (1971). On a class of elliptic pseudo differential operators degenerate on a submanifold. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 13(2):155.

[8] Alessia E. Kogoj and Ermanno Lanconelli. (2012). On semilinear Δλ-Laplace equation. *Nonlinear Anal.*, 75(12):4637–4649.

[9] Dario Daniele Monticelli. (2010) Maximum principles and the method of moving planes for a class of degenerate elliptic linear operators. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 12(3):611–654.

[10] James Serrin and Henghui Zou. (1996). Non-existence of positive solutions of Lane-Emden systems. *Differential Integral Equations*, 9(4):635–653.

[11] Qiaohua Yang, Dan Su, and Yinying Kong. (2015). Improved Hardy inequalities for Grushin operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 424(1):321–343.