TẠP CHÍ KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ ĐẠI HỌC DUY TÂN
DTU Journal of Science and Technology 04(65) (2024) 127-134

TRƯỜNG ĐẠI HỌC DUY TÂN
DUYTAN UNIVERSITY

Luật số lớn đối với tổng có trọng số các biến ngẫu nhiên mờ

Laws of large numbers for weighted sums of fuzzy random variables

Đỗ Thị Thùy Chi[a], Đặng Phạm Quỳnh Như[a], Nguyễn Thị Phương Lan[a], Phạm Văn Dược[b*]
Do Thi Thuy Chi[a], Dang Pham Quynh Nhu[a], Nguyen Thi Phuong Lan[a], Pham Van Duoc[b*]

[a]*Khoa Toán, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Đà Nẵng, Đà Nẵng, Việt Nam*
[a]*Faculty of Mathematics, UDN-University of Education and Science, Da Nang, 550000, Vietnam*
[b]*Khoa Khoa học Máy tính, Trường Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam*
[b]*Faculty of Computer Sciences, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Vietnam*

(Ngày nhận bài: 16/01/2024, ngày phản biện xong: 03/04/2024, ngày chấp nhận đăng: 10/06/2024)

Tóm tắt

Trong bài báo này chúng tôi mở rộng một kết quả trong bài báo của Dung và các cộng sự [1] sang biến ngẫu nhiên mờ đôi một độc lập. Với $\{X_n; n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên mờ đôi một độc lập, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X nhận giá trị thực có mô men cấp r vô hạn $(0 < r < 2)$, $\{c_{nk}; 1 \leq k \leq m_n, n \geq 1\}$ là mảng các số thực. Trong bài báo này chúng tôi thiết lập luật số lớn đối với tổng có trọng số $\bigoplus_{k=1}^{m_n} c_{nk} \otimes X_k$. Hệ quả thu được là luật số lớn Marcinkiewicz-Zygmund cho dãy biến ngẫu nhiên mờ.

Từ khóa: số mờ; biến ngẫu nhiên mờ; luật số lớn; hội tụ theo xác suất.

Abstract

In this paper, we extend the result of Dung et al. [1] to pairwise independent fuzzy random variables, with $\{X_n; n \geq 1\}$ being a sequence of independent random variables which is stochastically dominated by the random variable X with infinite r-th moment$(0 < r < 2)$, and $\{c_{nk}; 1 \leq k \leq m_n, n \geq 1\}$ being an array of real numbers. We investigate weak laws of large numbers for weighted sum $\bigoplus_{k=1}^{m_n} c_{nk} \otimes X_k$. As corollaries, we obtain the Marcinkiewicz-Zygmund weak law for sequences of fuzzy random variables.

Keywords: fuzzy numbers; fuzzy random variables; weak laws of large numbers; convergence in probability.

1. Giới thiệu

Suy luận thống kê cổ điển dựa trên những quan sát chính xác. Tuy nhiên, nhiều quan sát trong thực tế có giá trị thu được không chính xác như giá trị thực của nó. Kể từ khi Zadeh [2] giới thiệu lý thuyết tập mờ, sự thiếu chính xác có thể được mô tả hiệu quả hơn bởi các tập mờ. Dữ liệu không chính xác gặp phải trong suy luận thống kê thường bị ảnh hưởng bởi nhiều nguồn thiếu chính xác. Khái niệm biến ngẫu nhiên mờ đã được thiết lập tốt để kiểm soát những sai số như vậy trong suy luận thống kê. Cần lưu ý rằng khía cạnh cơ bản của suy luận thực tế là các định lý giới hạn.

Trong những năm gần đây đã có nhiều tác giả đã nghiên cứu các định lý giới cho tổng các biến ngẫu nhiên mờ như Alonso de la Fuente và Terán [3], Giap và các cộng sự [4], Joo [5].

Định lí sau là một kết quả của Dung và các cộng sự [1].

Định lí A. Cho $0 < r < 2$, $\{X_n; n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X và $H(x) = E(|X|^r I(|X| \leq x)$ là hàm biến đổi chậm ở vô cực. Cho $\{c_{nk}; 1 \leq k \leq m_n, n \geq 1\}$ là mảng các số thực sao cho

$\sup_n \sum_{k=1}^{n} c_{nk|}^r H(|c_{nk}|^{-1}) < \infty$ và $\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq m_n} |c_{nk}| = 0$.

Nếu $0 < r \leq 1$ thì

$$\sum_{k=1}^{m_n} c_{nk}\left(X_k - E\big(X_k I(|c_{kn}X_k| \leq 1)\big)\right) \xrightarrow{P} 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Nếu $1 < r < 2$ thì

$$\sum_{k=1}^{m_n} c_{nk}\big(X_k - E(X_k)\big) \xrightarrow{P} 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Trong bài báo này chúng tôi mở rộng kết quả trên sang dãy biến ngẫu nhiên mờ đôi một độc lập.

2. Kiến thức chuẩn bị

Tập mờ $\tilde{A}$ của tập số thực R được gọi là số mờ nếu hàm thuộc $\mu_{\tilde{A}}: R \to [0,1]$ thỏa mãn các tính chất sau [6]:

(1) Tồn tại $x_0 \in R, \mu_{\tilde{A}}(x_0) = 1$;

(2) $\mu_{\tilde{A}}$ là hàm tựa lõm, có nghĩa là $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}$ với mọi $x_1, x_2 \in R$ và $\lambda \in [0,1]$;

(3) $\mu_{\tilde{A}}$ là hàm nửa liên tục trên;

(4) $\overline{\{x \in R: \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}}$ là tập compact.

Với mỗi số thực a, ta ký hiệu ã số mờ với hàm thuộc là hàm đặc trưng I({a}) bằng 1 tại a và bằng 0 trong các trường hợp còn lại.

Lát cắt của số mờ $\tilde{A}$ ký hiệu là $\tilde{A}[\alpha] = \{x: \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$, ta cũng ký hiệu $\tilde{A}[0] = \overline{\{x \in R: \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}}$. $\tilde{A}[\alpha]$ là một tập đóng compact khác rỗng trong R và được kí hiệu $\tilde{A}[\alpha] = [\tilde{A}_\alpha^L, \tilde{A}_\alpha^U]$.

Tập hợp tất cả số mờ được ký hiệu là F.

Với mỗi $\alpha \in [0,1]$, Hesamian và Akbari [7] định nghĩa α-giá trị của số mờ $\tilde{A}$ như sau:

$$\tilde{A}_\alpha = \begin{cases} \tilde{A}_{2\alpha}^L & \text{nếu } 0 \leq \alpha \leq 0{,}5 \\ \tilde{A}_{2(1-\alpha)}^U & \text{nếu } 0{,}5 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Giá trị tuyệt đối của số mờ $\tilde{A}$, ký hiệu $|\tilde{A}|$, được giới thiệu bởi Dubois và Prade [8]. Sau đó, Hesamian và Akbari [7] viết dưới dạng α-giá trị của $\tilde{A}$:

$$|\tilde{A}|_\alpha = \max\{0, \tilde{A}_\alpha, -\tilde{A}_{1-\alpha}\}.$$

Cho $\tilde{A}, \tilde{B} \in F$ và hằng số $\lambda \in R$, phép cộng hai số mờ, phép nhân một số với số mờ được định nghĩa như sau:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B}[\alpha] = [\tilde{A}_\alpha^L + \tilde{A}_\alpha^L, \tilde{A}_\alpha^U + \tilde{A}_\alpha^U],$$

$$\lambda \otimes \tilde{A}[\alpha] = \begin{cases} [\lambda \tilde{A}^L_\alpha, \lambda \tilde{A}^U_\alpha] \text{ nếu } \lambda \geq 0 \\ [-\lambda \tilde{A}^U_\alpha, -\lambda \tilde{A}^L_\alpha] \text{ nếu } \lambda < 0 \end{cases}$$

Với hai số mờ $\widetilde{A}$ và $\widetilde{B}$, ta sử dụng các ký hiệu $\succ, \succeq, \prec$ và $\preceq$ có nghĩa như sau: $\widetilde{A} \succ \widetilde{B}$ nếu và chỉ nếu $\widetilde{A}_\alpha > \widetilde{B}_\alpha$ với mọi $\alpha \in [0,1]$, $\tilde{A} \succeq \tilde{B}$ nếu và chỉ nếu $\tilde{A}_\alpha \geq \tilde{B}_\alpha$ với mọi $\alpha \in [0,1]$, $\tilde{A} \prec \tilde{B}$ nếu và chỉ nếu $\tilde{A}_\alpha < \tilde{B}_\alpha$ với mọi $\alpha \in [0,1]$ và $\tilde{A} \preceq \tilde{B}$ nếu và chỉ nếu $\tilde{A}_\alpha \leq \tilde{B}_\alpha$ với mọi $\alpha \in [0,1]$.

Cho $p \geq 1$, metric d_p trên F được định nghĩa:

$$d_p(\tilde{A}, \tilde{B}) = \left(\int_0^1 |\tilde{A}_\alpha - \tilde{B}_\alpha| d\alpha \right)^{1/p}, \tilde{A}, \tilde{B} \in F.$$

Ta cũng có thể viết dưới dạng chuẩn $d_p(\tilde{A}, \tilde{B}) = ||\tilde{A}_\alpha - \tilde{A}_\alpha||_p$ và $d_p(\widetilde{A}, \widetilde{0}) = ||\widetilde{A}_\alpha||_p$, trong đó

$$||\tilde{A}_\alpha - \tilde{B}_\alpha||_p = \left(\int_0^1 |\tilde{A}_\alpha - \tilde{B}_\alpha|^p d\alpha \right)^{1/p}.$$

Cho không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ánh xạ $X: \Omega \to F$ được gọi là biến ngẫu nhiên mờ nếu với mỗi $\alpha \in [0,1]$, X_α là biến ngẫu nhiên nhận giá trị trên tập số thực R.

Ta nói dãy biến ngẫu nhiên mờ $\{X_n; n \geq 1\}$ đôi một độc lập nếu với mỗi $\alpha \in [0,1]$, $X_{i,\alpha}$ và $X_{j,\alpha}$ độc lập với nhau $(i \neq j)$.

Định nghĩa. Dãy biến ngẫu nhiên mờ $\{X_n; n \geq 1\}$ hội tụ theo xác suất đến biến ngẫu nhiên mờ X theo metric d_p nếu với mọi $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} P(d_p(X_n, X) > \epsilon) = 0.$$

Bổ đề 1. [9] *Cho $\{X_n; n \geq 1\}$ là dãy biến ngẫu nhiên đôi một độc lập và có kì vọng* 0*. Khi đó ta có*

$$E(|\textstyle\sum_{k=1}^n X_k|) \leq \sum_{k=1}^n E(|X_k|);$$

$$E\left(\left| \sum_{k=1}^n X_k \right|^2 \right) = \sum_{k=1}^n E(X_k^2).$$

Cho $a \geq 0$, hàm số đo được $f(x)$ xác định trên $[a; \infty)$ được gọi là hàm biến đổi chậm nếu $\lim_{x \to \infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = 1$ với mọi $t > 0$.

Với $x > 0$, ký hiệu $\log^+ x = \max\{1, \ln x\}$, $\log_2^+ x = \log^+(\log^+ x)$, trong đó $\ln x$ là hàm logarit tự nhiên. Dễ thấy rằng, $\log^+ x$, $\log_2^+ x$ là các hàm biến đổi chậm ở vô cực.

Bổ đề 2. [1] Cho $0 < r < 2$, $H(x) = E(|X|^r I(|X| \leq x)$ là hàm biến đổi chậm ở vô cực, khi đó ta có:

(a) $P(|X| > x) = o(x^{-r} H(x))$;

(b) $E(|X| I(|X| > x)) = o(x^{1-r} H(x))$ nếu $1 < r < 2$;

(c) $E(|X|^p I(|X| \leq x)) = o(x^{p-r} H(x))$ nếu $p > r > 0$.

Dãy biến ngẫu nhiên mờ $\{X_n; n \geq 1\}$ được gọi là bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực X nếu với mọi $t > 0$,

$\sup_n \mathrm{P}(|X_n| \succ \tilde{t}) \leq \mathrm{P}(|X| > t)$.

Bổ đề 3. Cho $p > 0$ và $\{X_n; n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên mờ, bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên X với $E(|X|^p) < \infty$. Khi đó, với mỗi $\alpha \in [0,1]$,

(a) $\mathrm{E}(|X_{n,\alpha}|^p)\,\mathrm{I}(|X_{n,\alpha}| \leq \mathrm{x}) \leq \mathrm{E}(|X|^p\,\mathrm{I}(|\mathrm{X}| \leq \mathrm{x}) + x^p\mathrm{P}(|\mathrm{X}| > \mathrm{x})$ với mọi $x > 0$;

(b) $\mathrm{E}(|X_{n,\alpha}|^p\,\mathrm{I}(|X_{n,\alpha}| > \mathrm{x}) \leq \mathrm{E}|X|^p\,\mathrm{I}(|\mathrm{X}| > \mathrm{x})$ với mọi $x > 0$.

Chứng minh

(a) $E(|X_{n,\alpha}|^p)\, I(|X_{n,\alpha}| \leq x) = \int_0^x t^p\, \mathrm{d}P(|X_{n,\alpha}| \leq t) = -\int_0^x t^p\, \mathrm{d}P(|X_{n,\alpha}| > t)$

$= -x^p P(|X_{n,\alpha}| > x) + \int_0^x P(|X_{n,\alpha}| > t)\mathrm{d}t^p \leq \int_0^x P(|X| > t)\mathrm{d}t^p$

$= x^p P(|X| > x) + \int_0^x t^p \mathrm{d}P(|X| \leq t) = E(|X|^p\, I(|X| \leq x) + x^p P(|X| > x)$.

(b) $E(|X_{n,\alpha}|^p)\, I(|X_{n,\alpha}| > x) = \int_x^\infty t^p\, \mathrm{d}P(|X_{n,\alpha}| \leq t) = -\int_x^\infty t^p\, \mathrm{d}P(|X_{n,\alpha}| > t)$

$= x^p P(|X_{n,\alpha}| > x) + \int_x^\infty P(|X_{n,\alpha}| > t)\mathrm{d}t^p \leq x^p P(|X| > x) + \int_x^\infty P(|X| > t)\mathrm{d}t^p$

$= \int_x^\infty t^p \mathrm{d}P(|X| \leq t) = E|X|^p\, I(|X| > x)$.

3. Kết quả nghiên cứu

Định lí. *Cho* $0 < r < 2$, $\{X_n; n \geq 1\}$ *là dãy các biến ngẫu nhiên mờ đôi một độc lập bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực* X, $H(x) = E(|\mathrm{X}|^{\mathrm{r}} I(|X| \leq x)$ *là hàm biến đổi chậm ở vô cực,* $\{c_{nk}; 1 \leq k \leq m_n, n \geq 1\}$ *là mảng các số thực dương thỏa mãn:*

$\sup_n \sum_{k=1}^n c_{nk|}^r H(|c_{nk}|^{-1}) < \infty$ *và* $\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq k\leq m_n} |c_{nk}| = 0$.

Nếu $0 < r \leq 1$ *thì*

$$d_1\left(\oplus_{k=1}^{m_n} c_{nk} \otimes X_k, \oplus_{k=1}^{m_n} c_{nk} \otimes E\left(X_k I(|c_{kn} \otimes X_k| \preceq \tilde{1})\right)\right) \xrightarrow{P} 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Nếu $1 < r < 2$ *thì*

$$d_1\left(\oplus_{k=1}^{m_n} c_{nk} \otimes X_k, \oplus_{k=1}^{m_n} c_{nk} \otimes E(X_k)\right) \xrightarrow{P} 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Chứng minh

Với $\mathrm{n} \geq 1, 1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{m_n}$, ta đặt

$$\mathrm{X}'_{\mathrm{nk}} = \mathrm{X_k I}(|\mathrm{c_{nk}X_k}| \preceq \tilde{1}); \mathrm{X}''_{\mathrm{nk}} = \mathrm{X_k I}(|\mathrm{c_{nk}X_k}| \succ \tilde{1})$$

Với $\epsilon > 0$ tùy ý, áp dụng các bất đẳng thức Liapunov, bất đẳng thức Markov và Bổ đề 3 ta được

$\mathrm{P}\left(\mathrm{d}_1(\oplus_{k=1}^{m_n} c_{nk}\mathrm{X}'_{nk}, \oplus_{k=1}^{m_n} c_{nk}\mathrm{E}(\mathrm{X}'_{nk})) > \epsilon\right) \leq \mathrm{P}\left(\mathrm{d}_2(\oplus_{k=1}^{m_n} c_{nk}\mathrm{X}'_{nk}, \oplus_{k=1}^{m_n} c_{nk}\mathrm{E}(\mathrm{X}'_{nk})) > \epsilon\right)$

$\leq \frac{1}{\epsilon^2} E\left(\left(d_2(\oplus_{k=1}^{m_n} c_{nk}\mathrm{X}'_{nk}, \oplus_{k=1}^{m_n} c_{nk}\mathrm{E}(\mathrm{X}'_{nk}))\right)^2\right)$

$= \frac{1}{\epsilon^2} E\left(\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{m_n} c_{nk}X'_{nk,\alpha} - c_{nk}E(X'_{nk,\alpha})\right)^2 \mathrm{d}\alpha\right)$

$$= \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^1 E\left(E\left(\sum_{k=1}^{m_n} c_{nk}X'_{nk,\alpha} - c_{nk}E\left(X'_{nk,\alpha}\right)\right)^2\right)\mathrm{d}\alpha$$

$$= \frac{1}{\epsilon^2}\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{m_n} E((c_{nk}X'_{nk,\alpha} - c_{nk}E(X'_{nk,\alpha}))^2)\right)\mathrm{d}\alpha$$

$$\leq \frac{2}{\epsilon^2}\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{m_n} c_{nk}{}^2E((X'_{nk,\alpha})^2)\right)\mathrm{d}\alpha$$

$$= \frac{2}{\epsilon^2}\int_0^1 \left(\sum_{k=1,c_{nk}\neq 0}^{m_n} c_{nk}^2E\left(\left|X_{k,\alpha}\right|^2 I\left(\left|c_{nk}X_{k,\alpha}\right| \leq 1\right)\right)\right)\mathrm{d}\alpha$$

$$+\frac{2}{\epsilon^2}\int_0^1 \left(\sum_{k=1,c_{nk}\neq 0}^{m_n} P\left(\left|X_{k,\alpha}\right| > |c_{nk}|^{-1}\right)\right)\mathrm{d}\alpha$$

$$\leq \frac{2}{\epsilon^2}\int_0^1 \left(\sum_{k=1,c_{nk}\neq 0}^{m_n} c_{nk}^2E\left(|X|^2 I(|X| \leq |c_{nk}|^{-1})\right)\right)\mathrm{d}\alpha$$

$$+\frac{2}{\epsilon^2}\int_0^1 \left(\sum_{k=1,c_{nk}\neq 0}^{m_n} P(|X| > |c_{nk}|^{-1})\right)\mathrm{d}\alpha.$$

Với $\delta > 0$ bé tùy ý, từ (a) và (c) của Bổ đề 2 suy ra tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $\forall x > x_0$,

$P(|X| > x) \leq \delta x^{-r}H(x)$ và $E(|X|^2 I(|X| > x) \leq \delta x^{2-r}H(x)$.

Vì vậy, với n đủ lớn, ta có với mọi $1 \leq k \leq m_n$ và $c_{nk} \neq 0$,

$P(|X| > |c_{nk}|^{-1}) \leq \delta|c_{nk}|^r H(|c_{nk}|^{-1})$ và $E(|X|^2 I(|X| > |c_{nk}|^{-1}) \leq \delta|c_{nk}|^{r-2}H(|c_{nk}|^{-1})$.

Điều này dẫn đến

$$P\left(d_1\left(\bigoplus_{k=1}^{m_n} c_{nk}X'_{nk}, \bigoplus_{k=1}^{m_n} c_{nk}E(X'_{nk})\right) > \epsilon\right) \leq \frac{2}{\epsilon^2}\delta\sum_{k=1}^{m_n}|c_{nk}|^r H(|c_{nk}|^{-1}) \leq \frac{2}{\epsilon^2}\delta.$$

Cho $n \to \infty$ sau đó cho $\delta \to 0$ ta được

$$P\left(d_1\left(\bigoplus_{k=1}^{m_n} c_{nk}X'_{nk}, \bigoplus_{k=1}^{m_n} c_{nk}E(X'_{nk})\right) > \epsilon\right) \to 0. \qquad (1)$$

Trường hợp 1: $0 < r \leq 1$. Với $\epsilon > 0$, ta có

$P(d_1(\bigoplus_{k=1}^{m_n} c_{kn}X''_k, \tilde{0}) > \epsilon) \leq \sum_{k=1}^{m_n} P\left(|c_{nk}X_k| \succ \tilde{1}\right)) \leq \sum_{k=1,c_{nk}\neq 0}^{m_n} P(|X| > |c_{nk}|^{-1})$.

Tương tự chứng minh (1) ta cũng có

$$P(d_1(\bigoplus_{k=1}^{m_n} c_{kn}X''_k, \tilde{0}) > \epsilon) \to 0. \qquad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) ta có được điều phải chứng minh.

Trường hợp 2: $1 < r < 2$. Với $\epsilon > 0$, ta cũng có

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{d}_1\left(\oplus_{k=1}^{m_n} c_{nk}X''_{nk},\oplus_{k=1}^{m_n} c_{nk}E(X''_{nk})\right)\right) > \epsilon\right) \le \frac{1}{\epsilon} E\left(d_1\left(\oplus_{k=1}^{m_n} c_{nk}X''_{nk},\oplus_{k=1}^{m_n} c_{nk}\mathrm{E}(X''_{nk})\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\epsilon} E\left(\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{m_n}\left(c_{nk}X''_{nk,\alpha} - c_{nk}E\left(X''_{nk,\alpha}\right)\right)\right| \mathrm{d}\alpha\right)$$

$$\le \frac{1}{\epsilon}\int_0^1 \sum_{k=1}^{m_n} E\left(\left|c_{nk}X''_{nk,\alpha} - c_{nk}E\left(X''_{nk,\alpha}\right)\right|\right) \mathrm{d}\alpha$$

$$\le \frac{2}{\epsilon}\int_0^1 \sum_{k=1}^{m_n} E\left(\left|c_{nk}X''_{nk,\alpha}\right|\right) \mathrm{d}\alpha$$

$$\le \frac{2}{\epsilon}\int_0^1 \sum_{k=1,c_{nk}\neq 0}^{m_n} |c_{nk}|E\left(|X|I(|X| > |c_{nk}|^{-1})\right) \mathrm{d}\alpha$$

$$= \frac{2}{\epsilon} \sum_{k=1,c_{nk}\neq 0}^{m_n} |c_{nk}|E\left(|X|I(|X| > |c_{nk}|^{-1})\right)$$

$$= o(1)\sum_{k=1}^{m_n}|c_{nk}|^r H(|c_{nk}|^{-1}) = o(1). \qquad (3)$$

Kết hợp (1) và (3) ta được điều phải chứng minh.

Với $c_{nk} = 1/n^{1/r}$ ta thu được luật số lớn Marcinkiewicz-Zygmund cho dãy biến ngẫu nhiên mờ như sau.

Hệ quả 1. *Cho $1 < r < 2$ và $\{X_n; n \ge 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên mờ đôi một độc lập $\{X_n; n \ge 1\}$ bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực X và $E(|X|^r) < \infty$. Khi đó*

$$\frac{1}{n^{1/r}} d_1\left(\oplus_{k=1}^{n} X_k,\oplus_{k=1}^{n} E(X_k)\right) \xrightarrow{P} 0 \textit{ khi } n \to \infty.$$

Với $\{a_{nk}; 1 \le k \le n, n \ge 1\}$ là mảng các số dương, nếu $H(x)$ là hàm biến đổi chậm ở vô cực và $r > 0$ thì $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-r}H(x) = 0$. Khi đó, với mỗi n,

$$\left\{s \ge 1: \sum_{k=1}^{m_n} \frac{a_{nk}}{s^r}\, H\left(\frac{s}{a_{nk}}\right) \le 1\right\}$$

là tập bị chặn nên ta đặt

$$D_n = inf\left\{s \ge 1: \sum_{k=1}^{m_n} \frac{a_{nk}}{s^r}\, H\left(\frac{s}{a_{nk}}\right) \le 1\right\}.$$

Ta có hệ quả sau.

Hệ quả 2. *Cho $0 < r < 2$, $\{X_n; n \ge 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên mờ đôi một độc lập bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực X và $H(x) = E(|\mathrm{X}|^{\mathrm{r}}I(|X| \le x)$ là hàm biến đổi chậm ở vô cực, $\{a_{nk}; 1 \le k \le m_n, n \ge 1\}$ là mảng các số dương thỏa mãn:*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le k\le \mathrm{n}} \mathrm{a}_{nk}\mathrm{D}_n^{-1} = 0.$$

Nếu $0 < r \leq 1$ *thì*

$$\frac{1}{D_n} d_1\left(\bigoplus_{k=1}^{m_n} a_{nk} \otimes X_k, \bigoplus_{k=1}^{m_n} a_{nk} \otimes E\left(X_k I\left(|a_{kn} \otimes X_k| \leq \tilde{1}\right)\right)\right) \xrightarrow{P} 0 \ khi\ n \to \infty.$$

Nếu $1 < r < 2$ *thì*

$$\frac{1}{D_n} d_1\left(\bigoplus_{k=1}^{m_n} a_{nk} \otimes X_k, \bigoplus_{k=1}^{m_n} a_{nk} \otimes E(X_k)\right) \xrightarrow{P} 0 \ khi\ n \to \infty,$$

trong đó

$$D_n = inf\left\{s \geq 1: \sum_{k=1}^{m_n} \frac{a_{nk}}{s^r} H\left(\frac{s}{a_{nk}}\right) \leq 1\right\}.$$

Chứng minh. Áp dụng định lí với $c_{nk} = \mathrm{a}_{nk}\mathrm{D}_n^{-1}$.

Trong trường hợp $\mathrm{a_{nk}} = 1 \forall \mathrm{n} \geq 1, 1 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{n}$ và $\mathrm{m_n} = \mathrm{n}$, $\mathrm{D_n}$ trở thành

$\mathrm{D_n} = \inf\{\mathrm{s} \geq 1: \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{s^r}} \mathrm{H(s)} \leq 1\} \to \infty$ khi $\mathrm{n} \to \infty$.

Ta thu được hệ quả sau.

Hệ quả 3. *Cho* $0 < r < 2$, $\{X_n; n \geq 1\}$ *là dãy các biến ngẫu nhiên mờ đôi một độc lập bị chặn ngẫu nhiên bởi biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực* X *và* $H(x) = E(|X|^r I(|X| \leq x)$ *là hàm biến đổi chậm ở vô cực.*

Nếu $0 < r \leq 1$ *thì*

$$\frac{1}{D_n} d_1\left(\bigoplus_{k=1}^{m_n} X_k, \bigoplus_{k=1}^{m_n} E\left(X_k I\left(|X_k| \leq \tilde{1}\right)\right)\right) \xrightarrow{P} 0 \ khi\ n \to \infty.$$

Nếu $1 < r < 2$ *thì*

$$\frac{1}{D_n} d_1\left(\bigoplus_{k=1}^{m_n} X_k, \bigoplus_{k=1}^{m_n} E(X_k)\right) \xrightarrow{P} 0 \ khi\ n \to \infty,$$

trong đó $D_n = \inf\{s \geq 1: \frac{n}{s^r} H(s) \leq 1\}$.

4. Kết luận

Chúng tôi đã thiết lập được luật số lớn đối với tổng có trọng số các biến ngẫu nhiên mờ. Các kết quả nhiên cứu có thể áp dụng vào mô hình hồi quy mờ như Xuân và các cộng sự [9] đã nghiên cứu mà trong phạm vi bài báo này chúng tôi chưa đề cập đến.

Tài liệu tham khảo

[1] L. V. Dung, T. Son and N. Yen. (2018). "Weak Laws of Large Numbers for sequences of random variables with infinite rth moments". *Acta Mathematica Hungarica*, 408-423.

[2] L. A. Zadeh. (1965). "Fuzzy sets". *Information and Control*, 338-353.

[3] M. A. d. l. Fuente and P. Teran. (2023). "Convergence in distribution of fuzzy random variables in Lp-type metrics". *Fuzzy Sets and Systems*, 108-653.

[4] D. X. Giap, N. V. Quang and B. N. T. Ngoc. (2022). "Some laws of large numbers for arrays of random upper semicontinuous functions". *Fuzzy Sets and Systems*, 129-148.

[5] S. Y. Joo. (2004). "Week laws of large numbers for fuzzy random variables". *Fuzzy Sets and Systems*, 453-464.

[6] D. Zhang, L. Deng, K. Cai and A. So. (2005). "Fuzzy Nonlinear Regression with Fuzzified Radial Basis Function Network". *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, 742-760.

[7] G. Hesamian and M. Akbari. (2018). "Fuzzy absolute error distance measure based on a generalized

difference operation". *International Journal of Systems Science*, 2454-2462.

[8] D. Dubois and H. Prade. (1979). "Fuzzy real algebra: some results". *Fuzzy Sets*, 327-334.

[9] T. D. Xuan, N. T. Quyen, N. T. T. An and L. V. Dung. (2021). "Convergence in probability for the estimator of nonparametric regression model based on pairwise independent errors with heavy tails". *DTU Journal of Science & Technology*, 2(45), 51-57.