

Phá hủy động cục bộ cho vật liệu tựa giòn sử dụng tích phân thời gian tường minh

Dynamic local damage in quasi-brittle materials using explicit time integration

Trần Thu Hiền^{a*}, Trần Thanh Hùng^{b,c}, Bùi Quốc Tính^c
Tran Thu Hien^{a*}, Tran Thanh Hung^{b,c}, Bui Quoc Tinh^c

^aKhoa Xây dựng, Trường Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam

^aFaculty of Civil Engineering, Duy Tan University, Danang, 550000, Vietnam

^bKhoa Cơ khí, Trường Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam

^bFaculty of Mechanical Engineering, Duy Tan University, Danang, 550000, Vietnam

^cViện Nghiên cứu Tinh toán Kỹ thuật Duy Tân (DTRICE), Đại học Duy Tân, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

^cDuy Tan Research Institute for Computational Engineering (DTRICE), Duy Tan University, Ho Chi Minh City, 700000, Vietnam

(Ngày nhận bài: 14/03/2024, ngày phản biện xong: 22/03/2024, ngày chấp nhận đăng: 15/04/2024)

Tóm tắt

Bài báo này giới thiệu một mô hình tính toán hiệu quả cho việc mô phỏng phá hủy cục bộ trong vật liệu tựa giòn chịu tác dụng của tải trọng động. Các đại lượng động học tại các nút phần tử theo thời gian được giải bằng phương pháp sai phân trung tâm và chéo hóa ma trận khối lượng. Trong khi các biến lịch sử và phá hoại cục bộ được cập nhật một cách dễ dàng từ thông tin đã tính toán của trường chuyển vị. Các phương pháp hiện tại có ưu điểm về thời gian tính toán so với các phân tích dưới dạng ẩn. Trạng thái của vật liệu được mô tả thông qua đại lượng hư hại d , biến thiên từ 0 đến 1 tương ứng với trạng thái vật liệu từ hoàn toàn nguyên vẹn đến hoàn toàn bị phá hủy. Đại lượng hư hại d phát triển theo biến dạng tương đương với quy luật hàm mũ. Tham số của hàm phát triển hư hại này phụ thuộc vào đặc trưng của vật liệu trong đó có năng lượng phá hủy và chiều dài đặc trưng của phần tử. Biến dạng tương đương được tính theo công thức smooth Rankine. Tính chính xác và hiệu quả của mô hình được khảo sát và so sánh với các kết quả thí nghiệm đã được công bố.

Từ khóa: mô hình phá hủy cục bộ; vật liệu tựa giòn; tải trọng động; phương pháp sai phân trung tâm; biến dạng tương đương smooth Rankine.

Abstract

This article introduces a local damage model for quasi-brittle materials subjected to dynamic loading. Kinematic information at element nodes over time is determined by using a central difference method and a lumped-mass matrix. While the history and local damage variables are updated straightforwardly with the obtained displacement field. The current methods have advantages in computational efficiency as compared to implicit analysis. The state of the material is described through a characteristic quantity of damage d , varying from 0 to 1, which corresponds to the material's state from completely intact to completely destroyed. The quantity d evolves with equivalent strain according to an exponential law. The parameter of this damage growth function depends on the representative element length and the material properties, including the fracture energy. The equivalent strain is calculated according to the smooth Rankine formula. The accuracy and efficiency of the model are validated by comparing it with experimental results.

*Tác giả liên hệ: Trần Thu Hiền

Email: tranthuhien197@gmail.com

Keywords: local damage model; quasi-brittle materials; dynamic loading; central difference method; equivalent strain smooth Rankine.

1. Mở đầu

Trong suốt quá trình sử dụng, các công trình kết cấu có nguy cơ bị hư hại, phá hủy cục bộ hoặc tổng thể dưới tác động của rất nhiều yếu tố, có thể kể đến như các tác nhân môi trường (nhiệt độ, chất ăn mòn,...), các loại tải trọng đặc biệt (hỏa hoạn, động đất,...). Trong số các nguyên nhân này, sự hư hại của vật liệu, kết cấu dưới tác dụng của tải trọng động, do hệ quả của quán tính, thường rất trầm trọng. Cơ chế phá hủy do tải trọng động thường phức tạp hơn so với tải trọng tĩnh [10]. Trong quá trình hư hại, các vết nứt thường bắt đầu với quỹ đạo thẳng, sau đó có thể chẻ ra thành nhiều nhánh. Hiện tượng này rất thường gặp trong thực tế với nhiều loại vật liệu khác nhau như bê tông, đá, polyme hoặc các đường ống dẫn khí nén [9,4]. Việc tính toán dự đoán được các hư hại động của vật liệu, kết cấu là một thách thức và cũng là một chủ đề quan trọng của cộng đồng cơ học tính toán. Những hiểu biết, kết quả thu được từ tính toán sẽ đóng góp rất lớn vào công tác phát triển, thiết kế vật liệu, kết cấu một cách bền vững, hiệu quả [11,15].

Bê tông là loại vật liệu được sử dụng rộng rãi trong xây dựng, cấu tạo từ nhiều thành phần. Ở cấp độ vĩ mô, có thể coi bê tông là vật liệu đồng nhất. Tuy nhiên, ở cấp trung và vi mô, bê tông là một vật liệu không đồng nhất gồm nhiều pha: các hạt cốt liệu được xem là hoàn toàn đặc, vữa xi măng chứa các lỗ rỗng và vùng tiếp giáp vữa xi măng - cốt liệu. Nghiên cứu quá trình phá hoại và ứng xử cơ học của bê tông vẫn là một nhiệm vụ phức tạp. Nhiều mô hình tính toán phá hoại cho bê tông đã được phát triển, ví dụ như: phương pháp hạt ngẫu nhiên, phương pháp không lưới, trường pha, phương pháp tiếp cận đa tỷ lệ và phương pháp phần tử hữu hạn mở rộng.

Mô hình phá hủy liên tục có thể chia làm hai nhóm chính với giả thiết bê tông là vật liệu bất đẳng hướng hoặc vật liệu đẳng hướng. Trong nhóm thứ nhất, với tính chất dị hướng của vật liệu, mô hình nhìn chung tính toán phức tạp với tensor biến dạng bậc cao [5,7,8]. Nhóm thứ hai, với tính chất đẳng hướng của vật liệu, mô hình phá hủy có ưu điểm tính toán đơn giản hơn. Hiện nhóm này có hai hướng tiếp cận chính là mô hình phá hủy phi cục bộ (non-local damage) và mô hình phá hủy cục bộ (local damage).

Hướng mô hình phá hủy phi cục bộ thường làm mất đi tính đúng đắn của bài toán giá trị biên, cuối cùng tạo ra vô số nghiệm có năng lượng tiêu tán trong phần tử hữu hạn nhỏ nhất của miền, làm cho giải pháp trở nên vô nghĩa. Ngoài ra, trong mô hình phi cục bộ cần giải phương trình cân bằng biến dạng tương đương về sự tiêu tán năng lượng với các phần tử xung quanh. Các mô hình liên tục bậc cao, mô hình gradient-enhanced hoặc mô hình phi cục bộ dựa trên tích phân đã được đề xuất [1,6,13]. Nhìn chung, các phương pháp phi cục bộ có chi phí tính toán lớn, dẫn đến ít khả thi khi ứng dụng trong các bài toán thực tế.

Trong khi đó, với mô hình phá hủy cục bộ, việc mô tả sự hư hại cục bộ không yêu cầu phải giải thêm phương trình nào về ứng xử suy yếu của vật liệu. Vì vậy, sự phụ thuộc qua lại của hệ phương trình mô tả chuyển động của vật rắn và sự tăng trưởng của trường phá hoại được tránh. Thuật toán giải sẽ bớt phức tạp hơn. Và với phương pháp phần tử hữu hạn chuẩn, mô hình phá hủy cục bộ có thể được thực hiện một cách hợp lý.

Bài báo này nhằm mục tiêu phát triển mô hình phá hủy cục bộ và thuật toán phần tử hữu hạn để tính toán, mô phỏng sự hư hỏng của vật liệu tựa giòn dưới tác dụng của tải trọng động. Trong đó, tham số suy yếu của mô hình được kiểm soát

thông qua một hệ số xác định từ năng lượng phá hủy của vật liệu và chiều dài đặc trưng của phần tử. Tham số suy yếu này trong hàm tăng trưởng hư hại khi tính toán bằng phần tử hữu hạn giúp loại bỏ vấn đề phụ thuộc vào mật độ lưới chia. Thêm vào đó, mô hình phá hủy cục bộ do nhóm phát triển được kết hợp với biến dạng tương đương theo công thức smooth Rankine. Điều này đã nâng cao ý nghĩa vật lý của hàm tăng trưởng hư hại khi xác định vị trí vết nứt trong các vật liệu tựa giòn. Trong nghiên cứu này, mô hình phá hủy đề xuất được thực hiện bởi phương pháp phần tử hữu hạn với các phần tử tứ giác chuẩn. Để rời rạc hóa theo bước thời gian, phương pháp sai phân trung tâm (Central Difference Method) được sử dụng [4]. Hiệu quả của mô hình phá hủy cục bộ phát triển cho bài toán động của vật liệu tựa giòn được kiểm tra thông qua các tính toán số. Độ chính xác của kết quả tính toán, được so sánh, đánh giá với các kết quả thực nghiệm đã được công bố [9].

$$\int_{\Omega} C \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial \delta \mathbf{v}}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \delta \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \delta \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}} \delta \mathbf{v} dA = 0 \quad (2)$$

Trong đó:

C : ma trận các hệ số đàn hồi của vật liệu;

$\delta \mathbf{v}$: trường vận tốc ảo thỏa mãn các điều kiện động học;

Vector chuyển vị \mathbf{u} (là một hàm của thời gian) tại các nút rời rạc được tính như sau [3]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P} \quad (3)$$

Trong đó:

\mathbf{M} : ma trận khối lượng;

\mathbf{K} : ma trận độ cứng;

\mathbf{P} : ma trận ngoại lực;

2. Lý thuyết tính toán

2.1. Phương trình vi phân cho bài toán động

Phương trình cân bằng động lượng gắn liền với điều kiện biên trong một vật rắn Ω được cho như sau [3]:

$$\Delta_x \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ trên miền } \Gamma_u$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ trên miền } \Gamma_t$$

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{0} \text{ và } \mathbf{v}(t=0) = \mathbf{v}_0$$

Trong đó:

$\boldsymbol{\sigma}$: tensor ứng suất;

\mathbf{b} : vector lực khối, tính trên một đơn vị thể tích vật liệu;

ρ : khối lượng riêng của vật liệu;

\mathbf{a} : vector gia tốc, $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$;

\mathbf{v} : vector vận tốc;

\mathbf{u} : vector chuyển vị;

\mathbf{n} : vector pháp tuyến đơn vị trên biên $\partial\Omega$;

$\bar{\mathbf{u}}$ là chuyển vị ràng buộc trên biên Γ_u ;

$\bar{\mathbf{t}}$ là lực kéo ràng buộc trên biên Γ_t ;

Dựa vào nguyên lý công ảo, ta có phương trình dạng yếu cho trường chuyển vị tại các nút phần tử như sau [3]:

Đây là một hệ phương trình vi phân tuyến tính bậc hai cần giải theo thời gian để xác định được vector chuyển vị \mathbf{u} tại các nút. Phương pháp sai phân trung tâm được sử dụng, với các xấp xỉ [4]:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \mathbf{a}_n \quad (4)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}) \quad (5)$$

Khi đó, phương trình dạng yếu đã được rời rạc tại thời điểm t_{n+1} có dạng như sau:

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{K} (\mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \mathbf{a}_n) = \mathbf{P}_{n+1} \quad (6)$$

Để đảm bảo sự ổn định của tính toán tích phân tường minh theo thời gian, bước thời gian Δt phải nhỏ hơn một ngưỡng giá trị Δt_{stable} [14]. Giá trị này liên quan tới tốc độ sóng nén giãn lớn nhất và kích thước lưới nhỏ nhất. Trong nghiên cứu này Δt_{stable} được tính như sau:

$$\Delta t = c\Delta t_{stable} = c \min_{mesh} \left(\frac{h_e}{\sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}} \right) \quad (7)$$

Trong đó, c là hệ số an toàn ($c < 1.0$); h_e là kích thước của phần tử; λ , μ là các hệ số Lamé.

Đại lượng $\sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$ là tốc độ của sóng biến dạng với trạng thái ứng suất phẳng.

Ngoài ra, khi giải phương trình trên để tìm gia tốc \mathbf{a}_{n+1} tại thời điểm t_{n+1} cần phải nghịch đảo ma trận khối lượng \mathbf{M} . Việc này đòi hỏi tốn nhiều thời gian tính toán. Vì vậy ma trận khối lượng \mathbf{M} được chuyển thành ma trận đường chéo bằng phương pháp cộng theo hàng [3]. Cụ thể như sau:

$$M_{aa} = \sum_b M_{ab} \quad \text{và} \quad M_{ab} = 0 \quad \text{khi} \quad a \neq b$$

2.2. Quan hệ ứng suất - biến dạng - chuyển vị

Định luật Hooke thể hiện quan hệ giữa ứng suất và biến dạng của vật liệu trong suốt quá trình chịu tải (có kể đến quá trình phá hủy) để tính như sau [13]:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-d)\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

Trong đó:

$\boldsymbol{\varepsilon}$: tensor biến dạng;

d là đại lượng vô hướng thể hiện trạng thái của vật liệu. Đại lượng này nhận giá trị trong khoảng $0 \div 1$, thể hiện sự suy yếu của vật liệu do ảnh hưởng của hư hại. Cụ thể như sau, $d = 0$ tương ứng với trạng thái vật liệu hoàn toàn bình thường, không có hư hại và $d = 1$ tương ứng trạng thái vật liệu bị hư hại hoàn toàn.

Biến dạng được xác định từ chuyển vị như sau:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (8)$$

2.3. Hàm tăng trưởng hư hại d

Quy luật tăng trưởng của biến hư hại d được biểu diễn bởi quy luật hàm mũ sau [12]:

$$d(k) = \begin{cases} 0 & \text{khi } k \leq k_0 \\ 1 - \frac{k_0}{k} \left[1 - \alpha + \alpha e^{-\beta(k-k_0)} \right] & \text{khi } k > k_0 \end{cases} \quad (9)$$

Trong đó:

k : biến lịch sử của biến dạng, được tính bằng giá trị lớn nhất của biến dạng tương đương ε_{eq} trong suốt quá trình biến dạng;

$$k \geq 0; \quad k = \max(\varepsilon_{eq}(\hat{t})), \quad \hat{t} \in [0, t];$$

k_0 là ngưỡng biến dạng phá hủy của vật liệu;

$k_0 = \frac{f_t}{E}$ với f_t và E lần lượt là cường độ chịu kéo và mô đun đàn hồi của vật liệu.

α và β là các tham số kiểm soát hình dáng của đường cong $d(k)$. α thể hiện cường độ dư của vật liệu sau khi bị phá hoại. Ở đây, α được lấy bằng 1, nghĩa là vật liệu hoàn toàn không còn cường độ dư. β là tham số đóng vai trò quan trọng trong nghiên cứu này, chủ yếu để kiểm soát độ dốc của đường suy yếu của vật liệu. β được xác định từ các tính chất của vật liệu và chiều dài đặc trưng của phần tử.

$$\beta = \frac{Ek_0 h_e}{G_f} \quad (10)$$

Trong đó:

h_e : chiều dài đặc trưng của phần tử, được xác định tùy thuộc vào dạng phần tử sử dụng để phân tích bài toán. Trong trường hợp phần tử tứ giác $h_e = \sqrt{A_e}$;

G_f : năng lượng phá hủy của vật liệu;

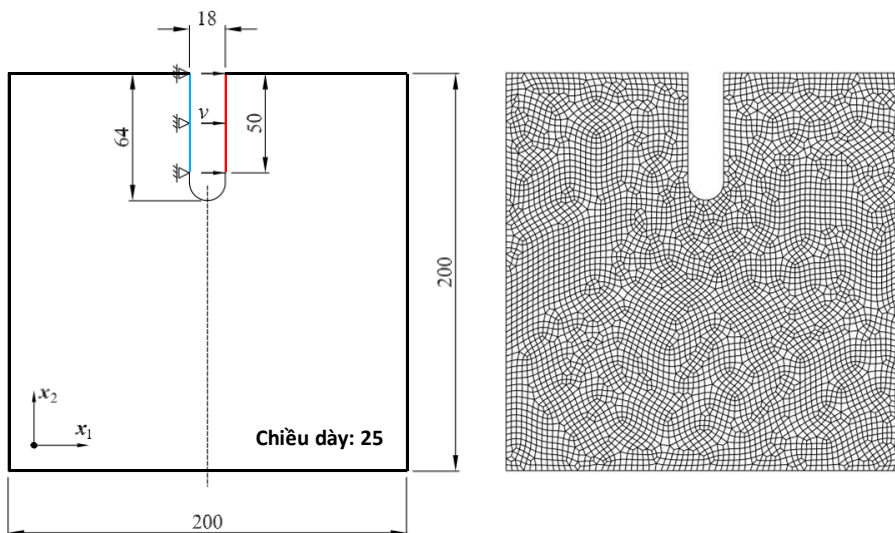
2.4. Biến dạng tương đương ε_{eq}

Giá trị biến dạng tương đương ε_{eq} cho phép liên hệ tensor biến dạng với một đại lượng một chiều, nói cách khác là sự “tương đương” giữa trạng thái chịu tải ba trục với trạng thái chịu tải đơn trục. Hiện nay, nhiều mô hình biến dạng tương đương đã được đề xuất bởi các tác giả khác nhau, ví dụ biến dạng tương đương von Mises, biến dạng tương đương theo quy tắc song năng lượng (bi-energy norm), biến dạng tương đương theo quy tắc song năng lượng cải tiến... Trong nghiên cứu này, biến dạng tương đương theo công thức smooth Rankine [13] được sử dụng.

$$\varepsilon_{eq}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{E} \sqrt{\sum_{I=1}^3 \langle \bar{\sigma}_I(\boldsymbol{\varepsilon}) \rangle^2} \quad (11)$$

Trong đó:

$\bar{\sigma}_I$ với $I=1,2,3$ là các ứng suất chính, thu được bằng cách tìm giá trị riêng của tensor ứng suất hữu hiệu (không xét đến hư hại);



Hình 1. Sơ đồ hình học, điều kiện biên của tấm bê tông dạng chữ U chịu tác dụng của tải trọng động (trái, đơn vị sử dụng: mm). Lưới phần tử hữu hạn Q4 sử dụng trong tính toán số (phải).

Thông số hình học và các điều kiện biên cho sơ đồ tính được thể hiện trên Hình 1 (trái). Trong đó, biên trái của khía áp điều kiện biên (đường màu xanh) được cố định theo phương x_1 trong khi biên phải của khía áp điều kiện biên (đường

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}; \quad (12)$$

$\langle \bullet \rangle = \frac{|\bullet| + \bullet}{2}$ là dấu ngoặc Macauley.

3. Kết quả số

Thực nghiệm phá hủy của một tấm bê tông dạng chữ U chịu tải trọng động ở các tốc độ gia tải khác nhau đã được thực hiện bởi Ožbolt và các cộng sự [9]. Ảnh hưởng của tốc độ biến dạng và của quán tính đến dạng phá hủy và hình thái vết nứt đã được nghiên cứu. Ožbolt và các cộng sự đã chỉ ra rằng, khi tốc độ gia tải tăng lên, sự phá hủy của tấm bê tông sẽ chuyển từ dạng I sang dạng phức hợp [9]. Mười hai trường hợp tốc độ gia tải đã được thực hiện, từ 0.045 m/s đến 4.298 m/s. Trong nghiên cứu này, chúng tôi chỉ lấy bốn trường hợp vận tốc để khảo sát mô hình phá hủy được đề xuất, bao gồm Case 1 = 0.304 m/s; Case 2 = 1.375 m/s; Case 3 = 3.318 m/s; Case 4 = 3.993 m/s.

màu đỏ) chịu một vận tốc theo phương x_1 (từ trái sang phải).

Vì dữ liệu về tải trọng tác động sử dụng trong thí nghiệm không được đưa ra trong bài báo gốc [9], nên trong nghiên cứu này, vận tốc tác động được giả thiết theo mô hình như sau [2]:

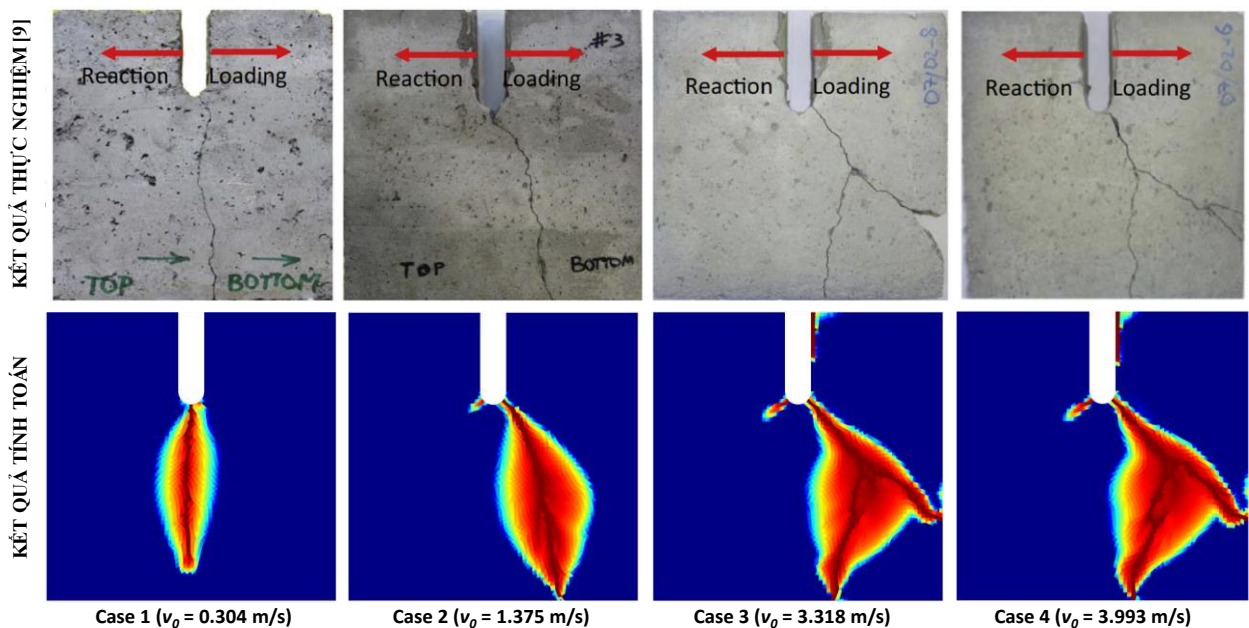
$$v = \begin{cases} \frac{t}{t_0} v_0 & \text{khi } t \leq t_0 \\ v_0 & \text{khi } t > t_0 \end{cases} \quad (13)$$

Với $t_0 = 200 \mu s$ và $v_0 = 0.304, 1.375, 3.318$ và 3.993 m/s lần lượt cho các trường hợp Case 1, Case 2, Case 3 và Case 4.

Các thông số của vật liệu bê tông thí nghiệm được lấy từ nghiên cứu [2] như sau: Mô đun đàn hồi Young's $E = 36 \text{ GPa}$, hệ số Poisson $\nu = 0.18$, khối lượng riêng $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$, năng lượng phá hủy $G_f = 65 \text{ J/m}^2$, cường độ chịu nén $f_c = 53 \text{ MPa}$, cường độ chịu kéo $f_t = 3.8 \text{ MPa}$, tỷ số cường độ chịu nén và chịu kéo $k = 13.95$, chiều dày tấm $t = 25 \text{ mm}$.

Một lưới phần tử hữu hạn gồm 5214 phần tử với kích thước phần tử trung bình $h_{average} = 3 \text{ mm}$ được sử dụng cho mô hình tính toán. Tổng thời gian tính toán là $1000 \mu s$ cho Case 1 và $500 \mu s$ cho các trường hợp còn lại (Case 2, 3 và 4). Bước thời gian tính toán được tính như trình bày ở phần 2.1, được giữ cố định và bằng $0.3335 \mu s$.

Kết quả phân tích sự phát triển của vùng phá hủy (thể hiện bởi giá trị đại lượng hư hại d) trong bốn trường hợp tải trọng Case 1, Case 2, Case 3 và Case 4 được thể hiện ở Hình 2 (phía dưới). Kết quả thực nghiệm của các trường hợp tải trọng này (Hình 2 phía trên) được lấy từ tài liệu [9] nhằm so sánh, đánh giá độ chính xác của mô hình số.



Hình 2. So sánh hình dạng vết nứt giữa kết quả tính toán số và kết quả thực nghiệm [9] (Màu xanh nước biển và màu đỏ thể hiện vật liệu còn nguyên vẹn và hoàn toàn phá hủy)

Có thể thấy rằng mô hình có khả năng dự đoán vị trí hình thành và hướng phát triển vết nứt trong cả bốn trường hợp tải trọng. Sự phát triển vết nứt phụ thuộc rất nhiều vào vận tốc tải trọng tác động. Ở vận tốc thấp (Case 1), vết nứt phát triển theo hướng vuông góc với đường tác dụng của tải trọng. Khi tăng tốc độ tác động, vết nứt có xu hướng dịch chuyển về phía bên phải của

mẫu thí nghiệm, theo chiều tác động của tải trọng. Với tốc độ tác động lớn, vết nứt chẻ ra làm hai nhánh.

Như vậy, mô hình phát triển cho phép dự đoán khá chính xác vị trí hình thành và hướng phát triển vết nứt của tấm vật liệu bê tông chịu tác dụng của tải trọng động ở các vận tốc khác nhau.

Bên cạnh đó, bằng phương pháp sai phân trung tâm - tích phân theo thời gian tường minh, mô hình phát triển hiện tại có ưu điểm về thời gian tính toán so với mô hình sử dụng tích phân ẩn như trong [12].

4. Kết luận

Trong nghiên cứu này, một mô hình phá hủy cục bộ hiệu quả cho việc dự báo vết nứt trong vật liệu tựa giòn chịu tác dụng của tải trọng động đã được đề xuất. Mô hình phá hủy cục bộ hiện tại sử dụng biến dạng tương đương theo smooth Rankine kết hợp với kỹ thuật chính quy hóa theo năng lượng để tính toán phá hủy động cho vật liệu tựa giòn. Ưu điểm của mô hình phá hủy cục bộ này là sự ít phụ thuộc của kết quả tính toán vào mật độ lưới chia và chi phí tính toán thấp. Ngoài ra, phương pháp sai phân trung tâm và chéo hóa ma trận khối lượng cũng cho phép giảm đáng kể thời gian tính toán so với phương pháp tích phân thời gian ẩn. Những điều này có ý nghĩa quan trọng cho khả năng mở rộng ứng dụng mô hình vào các bài toán 3 chiều phức tạp hơn trong tương lai. Kết quả tính toán hiện tại cho thấy, mô hình đề xuất có thể dự đoán một cách hợp lý hướng phát triển và vị trí của vết nứt động khi so sánh với kết quả thực nghiệm.

Tài liệu tham khảo

- [1] Azinpour, E., Ferreira, J.P.S., Parente, M.P.L., et al. (2018). "A simple and unified implementation of phase field and gradient damage models". *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* 5(1), 15.
- [2] Borden, M.J., Verhoosel, C.V., Scott, M.A., Hughes, T.J., Landis, C.M. (2012). "A phase-field description of dynamic brittle fracture". *Comput Methods Appl Mech Eng* (217–220), 77–95.
- [3] Bower, A.F. (2010). *Applied Mechanics of Solid*. New York : CRC Press, Taylor & Francis Group.
- [4] Chopra, A.K. (2012). *Dynamic of Structure*. Boston: Prentice Hall, Pearson.
- [5] Govindjee, S., Kay, G. J., Simo, J.C. (1995). "Anisotropic modelling and numerical simulation of brittle damage in concrete". *Int. J. Numer. Meth. Engng.* (38), 3611–3633.
- [6] Hien Poh, L., Swaddiwudhipong, S. (2009). "Over-nonlocal gradient enhanced plastic-damage model for concrete". *International Journal of Solids and Structures* 46(25-26), 4369–4378.
- [7] Krajcinovic, D., Fonseka, G.U. (1981). "The continuous damage theory of brittle materials, Part 1: General Theory". *Journal of Applied Mechanics* 48(4), 809-815.
- [8] Mazars J., Pijaudier-Cabot, G. (1989). "Continuum damage theory-application to concrete". *Journal of Engineering Mechanics* 115(2), 345–365.
- [9] Ožbolt, J., Bošnjak, J., Sola, E. (2013). "Dynamic fracture of concrete compact tension specimen: experimental and numerical study". *Int J Solids Struct* 50(25–26), 4270–4278.
- [10] Ravi-Chandar, K., Knauss, W. (1984). "An experimental investigation into dynamic fracture: III. On steady-state crack propagation and crack branching". *Int J Fract* (26), 141–154.
- [11] Song, J.H., Wang, H., Belytschko, T. (2008). "A comparative study on finite element methods for dynamic fracture". *Comput Mech* (42), 239–250.
- [12] Tính, B.Q., Hùng, T.T., Hu, X., Wu, C.T. (2022). "Simulation of dynamic brittle and quasi-brittle fracture: a revisited local damage approach". *International Journal of Fracture* (236), 59-85.
- [13] Tuấn, N.H.A., Tính, B.Q., Hirose, S. (2018). "Smoothing gradient damage model with evolving anisotropic nonlocal interactions tailored to loworder finite elements". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (328), 498-541.
- [14] Zhou, F., Molinari, J.F., Shioyas, T. (2005). "A rate-dependent cohesive model for simulating dynamic crack propagation in brittle materials". *Engineering Fracture Mechanics* (72), 1383-1410.
- [15] Wu, C.T., Ma, N., Takada, K., Okada, H. (2016). "A meshfree continuous-discontinuous approach for the ductile fracture modeling in explicit dynamics analysis". *Comput Mech* (58), 391–409.