TẠP CHÍ KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ ĐẠI HỌC DUY TÂN
DTU Journal of Science and Technology 03(64) (2024) 20-24

TRƯỜNG ĐẠI HỌC DUY TÂN
DUYTAN UNIVERSITY

Định lý kiểu Liouville cho bất phương trình elliptic suy biến

Liouville type theorem for a degenerate elliptic inequality

Phan Quốc Hưng[a,b*]
Phan Quoc Hung[a,b*]

[a]*Viện Nghiên cứu và Phát triển Công nghệ Cao, Trường Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam*
[a]*Institute of Research and Devolopment, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Vietnam*
[b]*Khoa Môi trường và Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam*
[b]*Faculty of Environment and Natural Science, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Viet Nam*

(Ngày nhận bài: 15/12/2023, ngày phản biện xong: 30/03/2024, ngày chấp nhận xong: 22/04/2024)

Tóm tắt

Chúng tôi nghiên cứu sự không tồn tại nghiệm dương của bất phương trình elliptic suy biến $-G_\alpha u \geq u^p$ trong không gian $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ với

$$-\infty < p \leq \frac{N_\alpha}{N_\alpha - 2}.$$

Ở đây $N_\alpha = N_1 + (1+\alpha)N_2$ là số chiều thuần nhất của $\mathbb{R}^N$ tương ứng với toán tử Grushin G_α.

Từ khóa: định lí kiểu Liouville; toán tử Grushin; nghiệm trên.

Abstract

We study the nonexistence of positive solutions to the degenerate elliptic inequality $-G_\alpha u \geq u^p$ in $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ provided

$$-\infty < p \leq \frac{N_\alpha}{N_\alpha - 2}.$$

Here $N_\alpha = N_1 + (1+\alpha)N_2$ is the homogeneous dimension of $\mathbb{R}^N$ associated to the Grushin operator G_α.

Keywords: Liouville-type theorem; Grushin operator; supersolutions.

1. Phát biểu bài toán

Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu bất phương trình:

$$-G_\alpha u \geq u^p, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}, \tag{1}$$

trong đó $G_\alpha u = \Delta_x u + |x|^{2\alpha} \Delta_y u$ là toán tử Grushin, Δ_x và Δ_y là các toán tử Laplace tương ứng với $x \in \mathbb{R}^{N_1}$ và $y \in \mathbb{R}^{N_2}$. Chúng tôi luôn giả thiết rằng $\alpha \geq 0$ và p là một số thực.

**Tác giả liên hệ:* Phan Quốc Hưng
Email: phanquochung@dtu.edu.vn

Khi $\alpha = 0$, G_α trở thành toán tử Laplace. Khi $\alpha > 0$, G_α là toán tử elliptic khi $|x| \neq 0$ và là toán tử suy biến trên tập $\{0\} \times \mathbb{R}^{N_2}$. Toán tử này đã được đưa ra trong [7, 2] và đã thu hút sự chú ý của nhiều nhà toán học. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu sự không tồn tại của nghiệm dương cổ điển trong không gian $\mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$. Chúng tôi tổng kết một số kết quả gần đây về định lí kiểu Liouville cho bài toán (1).

Trường hợp $\alpha = 0$ đã được giải quyết hoàn thiện trong [1, Định lí 2.1], ở đó điều kiện tối ưu về số mũ p cho sự không tồn tại nghiệm dương là $-\infty < p \leq \frac{N}{N-2}$ ($p \in \mathbb{R}$ nếu $N \leq 2$). Hơn nữa, khi $\alpha = 0$ và $p > \frac{N}{N-2}$, bất phương trình (1) có nghiệm dương

$$u(x, y) = k(1 + |x|^2 + |y|^2)^{-1/(p-1)}. \tag{2}$$

Khi $\alpha > 0$, D'Ambrosio và Lucente [5, Định lí 3.2] sử dụng phương pháp hàm thử để thiết lập định lí kiểu Liouville cho bài toán (1) với điều kiện $1 < p \leq \frac{N_\alpha}{N_\alpha-2}$, ở đó

$$N_\alpha := N_1 + (1 + \alpha)N_2$$

là số chiều thuần nhất tương ứng với toán tử G_α. Định lí kiểu Liouville cho $p \leq 1$ vẫn chưa được chứng minh. Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một cách tiếp cận mới để chứng minh định lí kiểu Liouville khi $p \leq 1$. Kết quả chính của chúng tôi là:

Định lí 1. *Giả sử $-\infty < p \leq \frac{N_\alpha}{N_\alpha-2}$. Khi đó bài toán* (1) *không có nghiệm dương cổ điển.*

Không giống như trường hợp $p > 1$ khi mà các chứng minh sử dụng phương pháp hàm thử, trường hợp $p \leq 1$ phức tạp hơn nhiều. Bất đẳng thức Hölder – một công cụ chính của phương pháp hàm thử – sẽ không thể được áp dụng khi $p \leq 1$. Bên cạnh đó, phương pháp sử dụng phương trình vi phân của Serrin-Zou [9] hoặc nguyên lí cực đại Armstrong-Sirakov [1] dường như không thể áp dụng được bởi vì tính suy biến của toán tử Grushin. Chúng ta sẽ không có hàm cầu cổ điển như ở trong [9] và điều này gây ra rất nhiều khó khăn trong chứng minh định lí kiểu Liouville. Để vượt qua được các khó khăn trên, chúng tôi sử dụng khoảng cách Grushin và công thức trung bình cầu đặc trưng cho toán tử Grushin như ở trong Garofalo-Lanconelli [6].

Tính tối ưu của điều kiện p trong Định lí 1 vẫn chưa được giải quyết, tức là câu hỏi về sự tồn tại nghiệm dương của bài toán (1) khi $p > \frac{N_\alpha}{N_\alpha-2}$ vẫn còn để ngỏ. Cho đến nay, chỉ trường hợp đặc biệt $\alpha = 0$ là được giải quyết hoàn toàn, khi mà nghiệm dương tồn tại có dạng (2) với $p > \frac{N}{N-2}$. Khi $\alpha = 1$, nghiệm dương tồn tại trong trường hợp $p \geq \frac{N_\alpha+2}{N_\alpha-2}$ dưới dạng

$$u(x, y) = k\Big((1 + |x|^2)^2 + 4|y|^2\Big)^{-1/(p-1)},$$

xem [5, Nhận xét 3.2] (xem thêm [10]).

2. Chứng minh kết quả chính

Kí hiệu $z = (x, y)$ là một điểm trong $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$, $\nabla = (\nabla_x, \nabla_y)$ và $\nabla_G = (\nabla_x, |x|^\alpha \nabla_y)$. Chuẩn của z được xác định bởi

$$||z||_G = \Big(|x|^{2(1+\alpha)} + (1 + \alpha)|y|^2\Big)^{\frac{1}{2(1+\alpha)}}.$$

Hàm

$$\Gamma(z, z_0) = ||z - z_0||_G^{2-N_\alpha} \tag{3}$$

là nghiệm cơ bản của G_α với kì dị tại z_0, xem [6].

Hình cầu mở và mặt cầu bán kính r với tâm z_0 được xác định như sau:

$$\mathcal{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{R}^N; \|z - z_0\|_G < r\}$$

và

$$\partial\mathcal{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{R}^N; \|z - z_0\|_G = r\}.$$

Trong trường hợp $z_0 = 0$, ta viết $\mathcal{B}_r$ và $\partial\mathcal{B}_r$. Hàm trọng

$$W(z) := \frac{|x|^{2\alpha}}{\|z\|_G^{2\alpha}} = |\nabla_G(\|z\|_G)|^2 \tag{4}$$

thỏa mãn

$$0 \leq W(z) \leq 1 \text{ và } W(0, y) = 0, W(x, 0) = 1.$$

Với hàm trọng W như trên, ta đặt

$$|\mathcal{B}_r| = \int_{\mathcal{B}_r} W(z)dz.$$

Bằng cách sử dụng hệ tọa độ cực như ở [4, 11], tồn tại hằng số $C_{N,\alpha} > 0$ phụ thuộc vào N_α và α sao cho

$$|\mathcal{B}_r| = C_{N,\alpha} r^{N_\alpha}. \tag{5}$$

Công thức đồng khu ([6, Công thức 2.4]) cho thấy rằng

$$|\mathcal{B}_r| = \int_{\mathcal{B}_r} W(z)dz = \int_0^r ds \int_{\partial\mathcal{B}_s} \frac{W(z)}{|\nabla(\|z\|_G)|} dH_{N-1},$$

trong đó dH_{N-1} là độ đo Hausdorff $(N-1)$ chiều trong $\mathbb{R}^N$. Do đó ta có

$$|\partial\mathcal{B}_r| := \frac{d}{dr}|\mathcal{B}_r| = \int_{\partial\mathcal{B}_r} \frac{W(z)}{|\nabla(\|z\|_G)|} dH_{N-1} = C_{N,\alpha} N_\alpha r^{N_\alpha - 1}.$$

Công thức này kết hợp với các kết quả của Garofalo và Lanconelli [6] cho phép ta định nghĩa trung bình cầu của hàm $V \in C(\mathbb{R})$ bởi

$$\overline{V}(r) = \frac{1}{|\partial\mathcal{B}_r|} \int_{\partial\mathcal{B}_r} V(z) \frac{W(z)}{|\nabla(\|z\|_G)|} dH_{N-1}, \text{ với } r > 0. \tag{6}$$

Ta có bổ đề sau (xem [6]).

Mệnh đề 2.1. *Giả sử $V \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Khi đó với mọi $r > 0$ ta có*

$$r^{N_\alpha - 1} \overline{V}'(r) = \frac{1}{C_{N,\alpha} N_\alpha} \int_{\mathcal{B}_r} G_\alpha V(z) dz. \tag{7}$$

Sau đây ta sẽ chứng minh Định lí 1.

Chứng minh Định lí 1. Kí hiệu C là hằng số dương không phụ thuộc r. Dựa vào các kết quả trong [3], ta chỉ cần chứng minh Định lí 1 cho $p \leq 1$.

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử u là nghiệm không âm không tầm thường của (1). Bằng cách dịch chuyển gốc tọa độ, ta có thể giả sử $u(0) > 0$.

Trường hợp 1: $p = 1$.

Bất đẳng thức (1) và $W \leq 1$ dẫn đến

$$-\int_{\mathcal{B}_r} G_\alpha u dz \geq \int_{\mathcal{B}_r} u dz \geq \int_{\mathcal{B}_r} uW dz$$
$$= C_{N,\alpha} N_\alpha \int_0^r \overline{u}(s) s^{N_\alpha - 1} ds \tag{8}$$

Kết hợp với tính chất không tăng của $\overline{u}$ và Mệnh đề 2.1 ta có

$$-N_\alpha r^{N_\alpha - 1} \overline{u}'(r) \geq \overline{u}(r) r^{N_\alpha}, \tag{9}$$

do đó

$$\overline{u}'(r) \leq -\frac{r}{N_\alpha} \overline{u}(r). \tag{10}$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta có

$$\overline{u}(r) \leq u(0) e^{-\frac{r^2}{2N_\alpha}}, \text{ với mọi } r > 0. \tag{11}$$

Mặt khác, sử dụng nguyên lí cực đại (xem [8]) và lí luận trong [9, Bổ đề 2.1], ta thu được

$$u(z) \geq C\Gamma(z, 0) = C\|z\|_G^{2-N_\alpha} \text{ với } \|z\|_G \geq 1. \tag{12}$$

Ta suy ra

$$\overline{u}(r) \geq C r^{2-N_\alpha}. \tag{13}$$

Từ (11) và (13), ta có

$$C r^{2-N_\alpha} \leq u(0) e^{-\frac{r^2}{2N_\alpha}}.$$

Điều này dẫn đến mâu thuẫn khi $r \to +\infty$.

Trường hợp 2: $0 \leq p < 1$.

Đặt $u = v^\sigma$ với $\sigma = \frac{1}{1-p} \geq 1$. Ta có

$$v^{\sigma p} \leq -G_\alpha u = -\sigma G_\alpha v v^{\sigma - 1} - \sigma(\sigma - 1) |\nabla_G v|^2 v^{\sigma - 2}$$
$$\leq -\sigma G_\alpha v v^{\sigma p}$$

Do đó,

$$\frac{1}{\sigma} \leq -G_\alpha v. \tag{14}$$

Chọn $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ sao cho

$$\text{supp}\phi \subset \mathcal{B}_1 \cap \{z = (x, y); |y| > |x|^{1+\alpha}\} \text{ và } \int_{\mathcal{B}_1} \phi(z) dz > 0.$$

Ta dễ thấy rằng $W(z) > \text{const} > 0$ trên tập $\{z = (x, y); |y| \geq |x|^{1+\alpha}\}$. Nhân (14) với $\phi_r(z) := \phi(\frac{x}{r}, \frac{y}{r^{1+\alpha}})$ và lấy tích phân trên $\mathcal{B}_r$, ta có

$$\int_{\mathcal{B}_r} \phi_r(z) dz \leq -\sigma \int_{\mathcal{B}_r} G_\alpha v \phi_r(z) dz$$
$$\leq \frac{\sigma}{r^{2(1+\alpha)}} \int_{\mathcal{B}_r} v |G_\alpha \phi_r(z)| dz$$
$$\leq \frac{C}{r^2} \int_{\mathcal{B}_r} vW dz, \tag{15}$$

trong đó ở bất đẳng thức cuối cùng, ta sử dụng $W(z) > \text{const} > 0$ trên tập giá của ϕ_r.

Từ $\int_{\mathcal{B}_1} \phi(z)dz > 0$, ta có

$$\int_{\mathcal{B}_r} \phi_r(z)dz = r^{N_\alpha} \int_{\mathcal{B}_1} \phi(z)dz \geq Cr^{N_\alpha}. \tag{16}$$

Hơn nữa, do $\overline{v}$ không tăng nên

$$\int_{\mathcal{B}_r} vWdz = \int_0^r \overline{v}(s)s^{N_\alpha - 1}ds \leq \frac{v(0)}{N_\alpha} r^{N_\alpha}. \tag{17}$$

Từ (15),(16) và (17) ta suy ra

$$0 < C \leq \frac{1}{r^2}.$$

Cho r tiến ra vô cực ta có điều mâu thuẫn.

Trường hợp 3: $p < 0$. Giả sử u là nghiệm dương của (1). Đặt $v = u^p$, khi đó (1) trở thành

$$-G_\alpha u \geq v.$$

Trước hết ta chứng minh $G_\alpha v \geq 0$ để cùng với Mệnh đề 2.1 dẫn đến $\overline{v}$ không giảm. Thật vậy, bằng tính toán trực tiếp ta có

$$G_\alpha v = G_\alpha(u^p) = p(G_\alpha u)u^{p-1} + p(p-1)|\nabla_G u|^2 u^{p-2}.$$

Cho nên $G_\alpha v$ là tổng của 2 số hạng không âm vì $pG_\alpha u \geq (-p)v \geq 0$. Nhắc lại rằng $p < 0$.

Sử dụng tính không giảm của $\overline{v}$ và lí luận như ở (8), (11) và (13), ta có

$$\overline{u}'(r) \leq -\frac{v(0)}{N_\alpha} r.$$

Do đó, với mọi $r > 0$,

$$\overline{u}(r) \leq u(0) - \frac{v(0)}{2N_\alpha} r^2.$$

Điều này mâu thuẫn với $u > 0$. Định lí được chứng minh.

Tài liệu tham khảo

[1] Armstrong, S. N. and Sirakov, B. (2011). Nonexistence of positive supersolutions of elliptic equations via the maximum principle. *Comm. Partial Differential Equations*, 36(11):2011–2047.

[2] Baouendi, M. S. (1967). Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. *Bull. Soc. Math. France*, 95:45–87.

[3] Capuzzo Dolcetta, I. and Cutri, A. (1997). On the Liouville property for sublaplacians. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, 25(1-2):239–256.

[4] D'Ambrosio, L. (2004). Hardy inequalities related to Grushin type operators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 132(3):725–734.

[5] D'Ambrosio, L. and Lucente, S. (2003). Nonlinear Liouville theorems for Grushin and Tricomi operators. *J. Differential Equations*, 193(2):511–541.

[6] Garofalo, N. and Lanconelli, E. (1990). Frequency functions on the Heisenberg group, the uncertainty principle and unique continuation. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 40(2):313–356.

[7] Grushin, V. V. (1971). On a class of elliptic pseudo differential operators degenerate on a submanifold. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 13(2):155.

[8] Monticelli, D. D. (2010). Maximum principles and the method of moving planes for a class of degenerate elliptic linear operators. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 12(3):611–654.

[9] Serrin, J. and Zou, H. (1996). Non-existence of positive solutions of Lane-Emden systems. *Differential Integral Equations*, 9(4):635–653.

[10] Wang, C., Wang, Q., and Yang, J. (2015). On the Grushin critical problem with a cylindrical symmetry. *Adv. Differential Equations*, 20(1-2):77–116.

[11] Yang, Q., Su, D., and Kong, Y. (2015). Improved Hardy inequalities for Grushin operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 424(1):321–343.