

Đánh giá khả năng chịu cắt chọc thủng của sàn bê tông cốt sợi thép bằng mô hình XGBoost

Estimating punching shear capacity of steel fibre reinforced concrete slabs using XGBoost

Trần Xuân Linh^{a,b*}
Tran Xuan Linh^{a,b*}

^aKhoa Xây dựng, Trường Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam

^aFaculty of Civil Engineering, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Vietnam

^bViện Nghiên cứu và Phát triển Công nghệ Cao, Trường Đại học Duy Tân, Đà Nẵng, Việt Nam

^bInstitute of Research and Development, Duy Tan University, Da Nang, 550000, Vietnam

(Ngày nhận bài: 19/6/2023, ngày phản biện xong: 17/7/2023, ngày chấp nhận đăng: 02/8/2023)

Tóm tắt

Nghiên cứu này ứng dụng mô hình học máy XGBoost để dự đoán khả năng chịu cắt chọc thủng của sàn bê tông cốt sợi thép. Bộ dữ liệu gồm 140 mẫu thí nghiệm sưu tầm từ tài liệu được sử dụng để huấn luyện và thử nghiệm mô hình. Các biến đầu vào của mô hình gồm: độ dày sàn (X_1); độ dày có hiệu của sàn (X_2); độ dài hoặc bán kính của mũ cột hoặc cột (X_3); độ bền chịu nén của bê tông (X_4); tỉ lệ cốt thép (X_5) và thể tích cốt sợi thép (X_6). Kết quả tính toán sau 20 lần chạy ngẫu nhiên mô hình cho thấy XGBoost đạt hiệu suất dự đoán tốt với sai số bình phương trung bình là 24.10, sai số tuyệt đối trung bình là 17.63, sai số phần trăm tuyệt đối trung bình là 8.11% và hệ số xác định là 0.94.

Từ khóa: khả năng chịu cắt chọc thủng; sàn bê tông cốt sợi thép; học máy có giám sát; thuật toán XGBoost; trí tuệ nhân tạo.

Abstract

This study applies the XGBoost model to estimate punching shear capacity of steel fibre reinforced concrete slabs. The model was trained and tested using a dataset of 140 samples obtained from existing literature. The input variables of the model include: the slab depth (X_1), effective depth of the slab (X_2), length or radius of the loading pad or column (X_3), compressive strength of concrete (X_4), the reinforcement ratio (X_5), and the fibre volume (X_6). The results of 20 random runs demonstrate that the XGBoost model exhibits excellent predictive capabilities with average root mean square error of 24.10, average mean absolute error of 17.63, average mean absolute percentage error of 8.11% and average coefficient of determination of 0.94.

Keywords: punching shear capacity; steel fibre reinforced concrete slabs; supervised machine learning; XGBoost algorithm; artificial intelligence.

1. Giới thiệu

Các kết cấu sàn phẳng bê tông cốt thép thường được sử dụng trong nhiều loại công trình xây dựng như các tòa nhà văn phòng và các tòa

nhà dân cư, các công trình sử dụng vào mục đích đỗ xe... Việc sử dụng sàn phẳng hai phương bằng bê tông cốt thép trong các công trình này mang lại nhiều ưu điểm khác nhau bao gồm tính tiện

*Tác giả liên hệ: Trần Xuân Linh

Email: tranxuanlinh@duytan.edu.vn

lợi trong thi công, giảm khối lượng công việc trong khâu lắp đặt cốt thép, giảm chiều cao tầng và tăng tính mỹ quan kiến trúc [1-5].

Một trong những yếu tố quan trọng ảnh hưởng đến độ bền và tuổi thọ của sàn phẳng đó là khả năng chọc thủng sàn được đặc trưng bằng lực cắt chọc thủng sàn (*Punching shear capacity* (PSC)). Nếu sàn bê tông bị chọc thủng tại vị trí cột, những vết thủng và vết nứt này sẽ có xu hướng mở rộng và lan sang xung quanh. Điều này dẫn đến hậu quả là sàn giảm hoặc mất khả năng chịu lực và công trình bị hư hại.

Trong những năm gần đây, cốt sợi thép đã và đang được sử dụng ngày càng rộng rãi trong các kết cấu xây dựng nói chung và sàn phẳng bê tông cốt thép nói riêng. Các loại cốt sợi thép này tạo nên kết cấu sàn phẳng bê tông có cốt sợi thép (*steel fibre reinforced concrete slabs* (SFRCS)) có thể giúp tăng khả năng chống chọc thủng sàn bê tông [6-9]. Nghiên cứu hiện tượng chọc thủng sàn là một bài toán phức tạp với nhiều yếu tố ảnh hưởng. Do đó, việc đánh giá khả năng PSC của sàn SFRCS dựa trên các dữ liệu thực nghiệm vẫn là một nhiệm vụ đầy thách thức và các phương pháp dựa trên công thức khác nhau chưa mang lại kết quả khả quan [1, 5, 10].

Hiện nay, có nhiều nghiên cứu ứng dụng các mô hình học máy trong lĩnh vực xây dựng như: sử dụng mô hình học máy XGBoost để dự đoán biến dạng từ biến của các dầm và sàn bê tông cốt thép (BTCT) [11]; dự báo biến dạng từ biến của bê tông xanh [12]; dự đoán cường độ chịu cắt của các kết cấu BTCT [13]; đánh giá khả năng chọc thủng sàn BTCT [1]; dự đoán vết nứt trong dầm BTCT [14]...

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ sử dụng mô hình học máy XGBoost được huấn luyện và kiểm nghiệm dựa trên bộ dữ liệu gồm 140 mẫu thí nghiệm sưu tầm từ các công trình nghiên cứu trước đó để dự đoán PSC của sàn SFRCS.

Các phần tiếp theo của bài báo theo trình tự sau: mục 2 trình bày phương pháp nghiên cứu

và mô tả tập dữ liệu; mục 3 giới thiệu các kết quả tính toán và thảo luận; phần cuối bài báo tóm tắt các kết luận và hướng nghiên cứu mở rộng đề tài.

2. Phương pháp nghiên cứu

2.1 Mô hình Extreme Gradient Boosting Machine (XGBoost)

Mô hình XGBoost được xây dựng bởi tác giả Tianqi Chen trong một dự án nghiên cứu tại Đại học Washington [15]. Mô hình này có tính linh hoạt trong sử dụng và tính hiệu quả tính toán cao. Một số tập đoàn lớn như Google, Amazon, Facebook cũng ứng dụng XGBoost trong hoạt động kinh doanh và tạo ra các sản phẩm. Mô tả chi tiết mô hình XGBoost có thể tìm thấy trong các tài liệu [16-18]. Trong bài báo này chúng tôi sẽ trình bày ngắn gọn những nội dung chính của phương pháp này.

Cho một tập gồm n mẫu $D = \{x_i, y_i\}_{i=1}^n$, trong đó $x_i \in R^m$ là véc tơ đầu vào với m tính năng, và $y_i \in R$ là véc tơ đầu ra tương ứng. Một cây hồi quy được liên kết với tập D là cây nhị phân trong đó: i) mỗi nút bên trong đại diện cho một quy tắc phân tách quyết định đầu vào mẫu thuộc nhánh bên trái hay nhánh bên phải dựa trên đặc điểm đầu vào; ii) mỗi lá được gán một giá trị là dự đoán của biến đầu ra. Mỗi lá được liên kết với một tập con $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ của biến đầu vào, các đầu vào tương ứng $\{x_i, i \in I\}$ có cùng kết quả dự đoán.

Đặt T là số lá của cây hồi quy, $w \in R^T$ thể hiện các giá trị dự đoán hoặc trọng số liên quan đến các lá, $q: D_x \subset R^m \rightarrow T$ biểu thị việc gán tập đầu vào cho các lá khác nhau, $f: R^m \rightarrow R$, $f(x) = w_{q(x)}$ là hàm dự đoán của cây.

Thuật toán XGBoost xây dựng một tập hợp các cây hồi quy một cách tuần tự và kết hợp chúng để dự đoán các giá trị đầu ra. Gọi $\hat{y}_i^{(t-1)}$ là giá trị dự đoán của đầu ra y_i tại bước thứ $t-1$, ở bước thứ t , XGBoost xây dựng một cây với hàm dự đoán f_t để giảm thiểu hàm mục tiêu sau:

$$L^t = \sum_{i=1}^n l(y_i, \hat{y}_i^{(t)}) + \Omega(f_t) = \sum_{i=1}^n l(y_i, \hat{y}_i^{(t-1)} + f_t(x_i)) + \Omega(f_t) \quad (1)$$

trong đó l là hàm tổn thất.

$$\Omega(f) = \gamma T + \frac{1}{2} \lambda \sum_{j=1}^T w_j^2 \quad (2)$$

trong đó γ là thông số giảm tối thiểu và λ là thông số điều chỉnh $L2$.

L_t được tính theo công thức sau [19]:

$$L^t \approx \sum_{i=1}^n \left[l(y_i, \hat{y}_i^{(t-1)}) + g_i f_t(x_i) + \frac{1}{2} h_i f_t^2(x_i) \right] + \Omega(f_t) \quad (3)$$

trong đó $g_i = \partial_{\hat{y}_i^{(t-1)}} l(y_i, \hat{y}_i^{(t-1)})$ và $h_i = \partial_{\hat{y}_i^{(t-1)}}^2 l(y_i, \hat{y}_i^{(t-1)})$.

Xét tối thiểu hóa của hàm mục tiêu đơn giản sau:

$$\tilde{L}^t = \sum_{i=1}^n \left[g_i f_t(x_i) + \frac{1}{2} h_i f_t^2(x_i) \right] + \Omega(f_t) \quad (4)$$

Từ đó có thể thu được các giá trị tối ưu w_j^* và \tilde{L}^t như sau:

$$w_j^* = -\frac{\sum_{i \in I_j} g_i}{\sum_{i \in I_j} h_i + \lambda}, \quad \tilde{L}^t(q) = -\frac{1}{2} \sum_j \frac{(\sum_{i \in I_j} g_i)^2}{\sum_{i \in I_j} h_i + \lambda} + \gamma T \quad (5)$$

trong đó I_j là tập con của tập đầu vào liên kết với lá thứ j , tức là, $I_j = \{i: q(x_i) = j\}$.

Cần lưu ý rằng, phương trình (5) chỉ có thể sử dụng để tìm trọng số tối ưu khi cấu trúc của cây q đã được xác định.

Một cây mới được tạo ra bằng phương pháp phân tách trong cây hiện tại. Quá trình phân tách được xác định để tối đa hóa mức giảm bị mất.

$$\tilde{L}_{split} = -\frac{1}{2} \left[\frac{(\sum_{i \in I_L} g_i)^2}{\sum_{i \in I_L} h_i + \lambda} + \frac{(\sum_{i \in I_R} g_i)^2}{\sum_{i \in I_R} h_i + \lambda} - \frac{(\sum_{i \in I} g_i)^2}{\sum_{i \in I} h_i + \lambda} \right] - \gamma \quad (6)$$

trong đó I_L và I_R là các tập con của tập đầu vào liên kết với các nút bên trái và bên phải sau khi phân tách cây.

Thuật toán XGBoost

Xác định các thông số của mô hình XGBoost gồm số bước lặp γ, λ và kích thước bước nhảy η

Sắp xếp tập đầu vào theo các giá trị tính năng

Với mỗi bước lặp t

Tính g_i và h_i

Kiểm tra cây hiện tại và quyết định phân tách tốt nhất dựa trên phương trình (6)

Tính các trọng số của cây mới $f_t(x)$ dựa trên biểu thức (5)

Giá trị dự đoán: $\hat{y}_i^{(t)} = \hat{y}_i^{(t-1)} + \eta f_t(x_i)$ (7)

Trả lại mô hình XGBoost sau khi huấn luyện

Hình 1 Thuật toán XGBoost.

Thuật toán XGBoost được thể hiện trong Hình 1. Để xây dựng mô hình xấp xỉ hàm dựa trên XGBoost, các tham số sau phải được định nghĩa:

(i) (η): kích thước bước hay tốc độ học được sử dụng trong biểu thức (7). Giá trị η trong khoảng $[0,1]$, theo mặc định $\eta = 0.3$.

(ii) max_depth độ sâu tối đa cho trong khoảng $[0, \infty]$, theo mặc định độ sâu tối đa bằng 6

(iii) (λ): thông số hiệu chỉnh L2 được sử dụng trong phương trình (2). λ dao động trong đoạn $[0, \infty]$, theo mặc định $\lambda = 1$.

Trong nghiên cứu này chúng tôi sử dụng các thông số mặc định của XGBoost.

2.2 Bộ dữ liệu thực nghiệm

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng một bộ dữ liệu thực nghiệm gồm 140 mẫu được sưu tầm từ tài liệu trong công trình nghiên cứu trước đó [5]. Các yếu tố ảnh hưởng đến PSC của sàn SFRCS gồm: độ dày sàn (X_1); độ dày có hiệu của sàn (X_2); độ dài hoặc bán kính của mũ cột hoặc cột (X_3); độ bền chịu nén của bê tông (X_4); tỉ lệ cốt thép (X_5) và thể tích cốt sợi thép (X_6).

3. Kết quả tính toán và thảo luận

Bộ dữ liệu được chuẩn hóa bằng phép biến đổi dữ liệu điểm Z (*Z-score data transformation*) (công thức (8)) nhằm giảm tác động tiêu cực của các biến có giá trị lớn. Các chỉ số sau được sử dụng để đánh giá hiệu suất tính toán của XGBoost: sai số toàn phương trung bình (RMSE), sai số tuyệt đối trung bình (MAE), sai số phần trăm tuyệt đối trung bình (MAPE) và hệ

số xác định (R^2) (công thức (9-12)). Việc sử dụng nhiều thước đo khác nhau sẽ giúp nêu bật các ưu và nhược điểm của mô hình [11].

$$X_N = \frac{X_O - m_X}{s_X} \quad (8)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Y_{A,i} - Y_{P,i})^2} \quad (9)$$

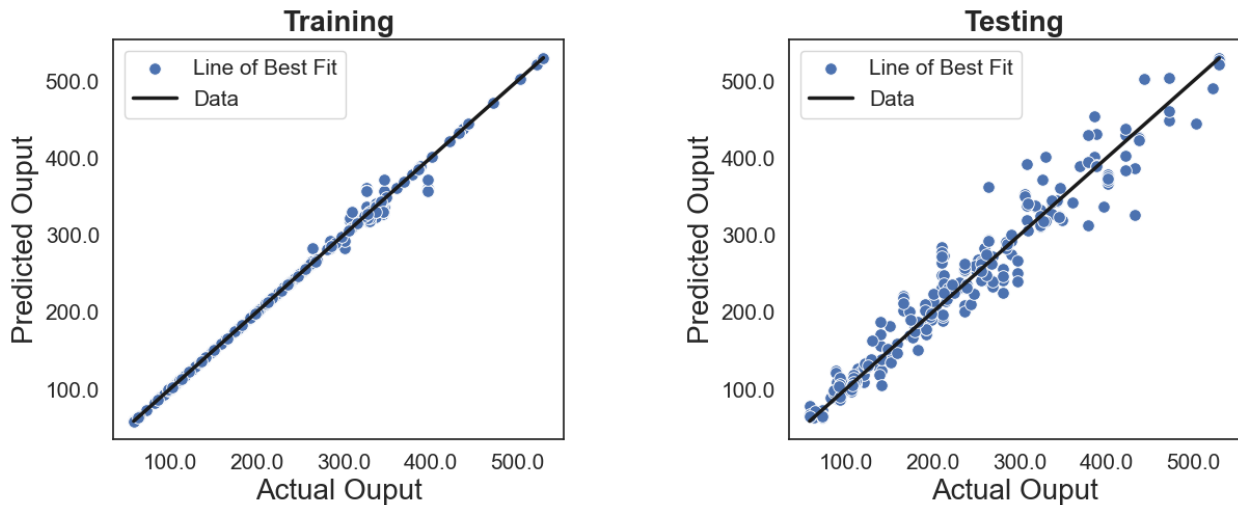
$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|Y_{A,i} - Y_{P,i}|}{Y_{A,i}} \quad (10)$$

$$MAPE = \frac{100\%}{N} \sum_{t=1}^N \frac{|Y_{A,i} - Y_{P,i}|}{Y_{A,i}} \quad (11)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (Y_{A,i} - Y_{P,i})^2}{\sum_{i=1}^N (Y_{A,i} - \bar{Y})^2} \quad (12)$$

trong đó X_N và X_O lần lượt là các biến đã được chuẩn hóa và biến đầu vào chưa qua xử lý; m_X và s_X là giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của các biến ban đầu; $Y_{A,i}$ và $Y_{P,i}$ là giá trị biến đầu ra thực tế và dự đoán của mẫu dữ liệu thứ i^{th} ; \bar{Y} là giá trị trung bình của các biến đầu ra thực tế; N là số lượng mẫu dữ liệu.

Trong bài báo này mô hình XGBoost được xây dựng dựa trên ngôn ngữ lập trình *Python* và thư viện *scikit-learn*. Bộ dữ liệu sẽ được chia ngẫu nhiên thành hai tập con gồm: tập thử nghiệm (10%) và tập huấn luyện (90%). Mô hình được chạy 20 lần. Kết quả dự đoán PSC của sàn SFRCS bằng XGBoost trong giai đoạn huấn luyện (training) và thử nghiệm (testing) sau 20 lần chạy mô hình thể hiện trên Hình 2. Có thể thấy rằng các điểm dữ liệu dự đoán bằng mô hình đa số gần trùng khớp với kết quả thực nghiệm (các điểm màu xanh nằm trên hoặc phân bố gần đường chéo “*Line of best-fit*”). Đặc biệt, mô hình có khả năng dự đoán với độ chính xác cao nhất đối với các trường hợp có PSC nhỏ hơn 350 kN.



Hình 2. Minh họa của mô hình dự đoán trong giai đoạn huấn luyện (training) và thử nghiệm (testing)

Bảng 1 trình bày chi tiết phần so sánh kết quả tính toán của thuật toán XGBoost trong bài báo này với các mô hình hồi quy tuyến tính đa biến liên tiếp SPMLR (*Sequential Piecewise Multiple Linear Regression*), mô hình mạng nơ ron nhân tạo GD-BPANR (*gradient descent backpropagation*) và mô hình mạng nơ ron nhân tạo LM-ANR (*Levenberg-Marquardt backpropagation*) trong nghiên cứu [1]. Mô hình XGBoost cho kết quả dự đoán có độ chính xác cao hơn so với ba mô hình còn lại ở tất cả các

chỉ số trong cả hai giai đoạn huấn luyện và thử nghiệm. Ngoại trừ trường hợp chỉ số hệ số xác định R^2 thấp hơn mô hình SPMLR (0.94 so với 0.95). Cụ thể, các chỉ số trung bình sau 20 lần chạy của mô hình XGBoost ở giai đoạn kiểm nghiệm lần lượt là: RMSE = 24.10, MAPE = 8.11%, MAE = 17.63, và $R^2 = 0.94$. Do đó, dựa trên những phân tích trên thì mô hình XGBoost hoàn toàn có thể sử dụng để dự đoán PSC của sản SFRCS với độ chính xác tương đối cao.

Bảng 1. So sánh kết quả tính toán của mô hình XGBoost với các mô hình khác [1]

| Giai đoạn | Thông số | XGBoost | | SPMLR | | GD-BPANR | | LM-ANR | |
|-------------|----------|---------|------|-------|------|----------|------|--------|-------|
| | | TB | ĐLC | TB | ĐLC | TB | ĐLC | TB | ĐLC |
| Huấn luyện | RMSE | 5.42 | 0.86 | 21.95 | 2.92 | 20.74 | 2.37 | 29.63 | 8.7 |
| | MAPE | 0.46 | 0.07 | 8.74 | 1.07 | 7.73 | 0.75 | 10.85 | 3.48 |
| | MAE | 1.44 | 0.22 | 16.97 | 2.18 | 15.34 | 1.73 | 21.69 | 6.74 |
| | R^2 | 0.99 | 0.00 | 0.96 | 0.01 | 0.97 | 0.01 | 0.93 | 0.04 |
| Kiểm nghiệm | RMSE | 24.10 | 8.06 | 27.47 | 5.22 | 33.16 | 8.91 | 35.78 | 15.06 |
| | MAPE | 8.11 | 2.11 | 11.21 | 2.79 | 12.04 | 2.73 | 13.73 | 8.03 |
| | MAE | 17.63 | 5.85 | 21.52 | 3.79 | 24.9 | 5.83 | 26.38 | 9.84 |
| | R^2 | 0.94 | 0.05 | 0.95 | 0.03 | 0.91 | 0.06 | 0.9 | 0.09 |

(TB: trung bình, ĐLC: độ lệch chuẩn)

4. Kết luận

Trong bài báo này chúng tôi sử dụng mô hình học máy XGBoost để dự đoán PSC của sản SFRCS. Mô hình XGBoost được huấn luyện và thử nghiệm dựa trên bộ dữ liệu thực nghiệm gồm

140 mẫu thí nghiệm sưu tầm từ các tài liệu sẵn có. Sáu yếu tố sau được chọn làm biến đầu vào của mô hình: độ dày có hiệu của sản; độ dài hoặc bán kính của mũ cột hoặc cột; độ bền chịu nén của bê tông; tỉ lệ cốt thép và thể tích cốt sợi thép. Kết quả tính toán và so sánh các thông số RMSE,

MAE, MAPE và R^2 với các mô hình khác như SPMLR, GD-BPANR và LM-ANR cho thấy mô hình XGBoost có khả năng dự đoán PSC của sàn SFRCs với độ chính xác tương đối cao.

Ứng dụng mô hình XGBoost với các thuật toán tối ưu hóa các tham số nhằm nâng cao hiệu suất tính toán và cải thiện độ chính xác dự đoán của mô hình cũng là một hướng nghiên cứu mở rộng của bài báo này trong tương lai.

Tài liệu tham khảo

- [1] Hoang N.-D. (2019). Estimating Punching Shear Capacity of Steel Fibre Reinforced Concrete Slabs Using Sequential Piecewise Multiple Linear Regression and Artificial Neural Network. *Measurement* (137), 58-70. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2019.01.035>
- [2] Gouveia N. D., Faria D. M. V., & Ramos A. P. (2019). Assessment of SFRC flat slab punching behaviour – part II: reversed horizontal cyclic loading. *Magazine of Concrete Research* 71(1), 26-42. DOI: 10.1680/jmacr.17.00344
- [3] Habibi F., Redl E., Egberts M., Cook W. D., & Mitchell D. (2012). Assessment of CSA A23.3 structural integrity requirements for two-way slabs. *Canadian Journal of Civil Engineering* 39(4), 351-361. DOI: 10.1139/12012-013
- [4] Miguel Fernandez Ruiz Y. M., & Aurelio M. (2013). Post-Punching Behavior of Flat Slabs. *Structural Journal* 110(5), 801-812. DOI: 10.14359/51685833
- [5] Maya L. F., Fernández Ruiz M., Muttoni A., & Foster S. J. (2012). Punching shear strength of steel fibre reinforced concrete slabs. *Engineering Structures* (40), 83-94.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.02.009>
- [6] Shah A. A., & Ribakov Y. (2011). Recent trends in steel fibered high-strength concrete. *Materials & Design* 32(8), 4122-4151.
DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2011.03.030>
- [7] Tan K. H., & Venkateshwaran A. (2017). Punching Shear in Steel Fibre Reinforced Concrete Slabs Without Traditional Reinforcement. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 246(1), 012025.
- [8] Ying Tian J. O. J., & Oguzhan B. (2008). Strength Evaluation of Interior Slab-Column Connections. *Structural Journal* 105(6), 692-700.
DOI: 10.14359/20097
- [9] Cheng M.-Y., & Parra-Montesinos G. J. (2010). Evaluation of Steel Fiber Reinforcement for Punching Shear Resistance in Slab-Column Connections - Part I: Monotonically Increased Load. *Structural Journal* 107(1), 101-109.
DOI: 10.14359/51663394
- [10] Narayanan R., & Darwish I. Y. S. (1987). Punching shear tests on steel-fibre-reinforced micro-concrete slabs. *Magazine of Concrete Research* 39(138), 42-50. DOI: 10.1680/macr.1987.39.138.42
- [11] Nguyen H., Nguyen N.-M., Cao M.-T., Hoang N.-D., & Tran X.-L. (2021). Prediction of long-term deflections of reinforced-concrete members using a novel swarm optimized extreme gradient boosting machine. *Engineering with Computers* (38), 1-13.
- [12] Sadowski Ł., Nikoo M., Shariq M., Joker E., & Czarnecki S. (2019). The Nature-Inspired Metaheuristic Method for Predicting the Creep Strain of Green Concrete Containing Ground Granulated Blast Furnace Slag. *Materials* 12(2), 293.
- [13] Kurtoglu A. E., Gulsan M. E., Abdi H. A., Kamil M. A., & Cevik A. (2017). Fiber reinforced concrete corbels: Modeling shear strength via symbolic regression. *Computers and Concrete*, 20(1), 065-075
- [14] Ghadimi S., & Kourehli S. S. (2017). Multiple crack identification in Euler beams using extreme learning machine. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 21(1), 389-396. doi:10.1007/s12205-016-1078-0
- [15] Chen T. Story and lessons behind the evolution of xgboost. Retrieved from <https://homes.cs.washington.edu/~tqchen/2016/03/10/story-and-lessons-behind-the-evolution-of-xgboost.html>
- [16] Filz George M., & Griffiths D. V. (2000). *Proceedings*.
DOI: <https://doi.org/10.1061/9780784405024>
- [17] Chen T. (2014). Introduction to Boosted Trees. Retrieved from <http://homes.cs.washington.edu/~tqchen/pdf/BoostedTree.pdf>
- [18] Chen T., & Guestrin C. (2016). XGBoost: A Scalable Tree Boosting System. *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, San Francisco, California, USA*.
- [19] Friedman J., Hastie T., & Tibshirani R. (2000). Additive logistic regression: a statistical view of boosting (With discussion and a rejoinder by the authors). *Ann. Statist.* 28(2), 337-407. DOI: 10.1214/aos/1016218223.