

Exciton ngưng tụ trong mô hình hai dải năng lượng có tương tác điện tử - phonon

Excitonic condensation in two-band model involving electron-phonon interaction

Đỗ Thị Hồng Hải^{a,b,c}, Phan Văn Nhâm^{d,*}

Hong Hai Do Thi^{a,b,c}, Van Nham Phan^{d,*}

^aHọc viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam,
18 Hoàng Quốc Việt, Hà Nội, Việt Nam

Graduate University of Science and Technology, Vietnam Academy of Science and Technology,
18 Hoang Quoc Viet, Hanoi, Vietnam

^bViện Vật lý, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam, 18 Hoàng Quốc Việt, Hà Nội, Việt Nam
Institute of Physics, Vietnam Academy of Science and Technology, 18 Hoang Quoc Viet, Hanoi, Vietnam

^cTrường Đại học Mỏ - Địa chất, 18 Phố Viên, Bắc Từ Liêm, Hà Nội, Việt Nam

Hanoi University of Mining and Geology, 18 PhoVien, Bac Tu Liem, Hanoi, Vietnam

^dViện Nghiên cứu và Phát triển Công nghệ cao, Đại học Duy Tân, 3 Quang Trung, Đà Nẵng, Việt Nam
Institute of Research and Development, Duy Tan University, 3 Quang Trung, Da Nang, Vietnam

(Ngày nhận bài: 06/04/2019, ngày phản biện xong: 15/04/2019, ngày chấp nhận đăng: 16/04/2019)

Tóm tắt

Trạng thái ngưng tụ exciton trong hệ bán kim loại được nghiên cứu khi chúng tôi khảo sát mô hình hai dải năng lượng có tương tác điện tử - phonon. Trong gần đúng trường trung bình, trạng thái ngưng tụ exciton được xác định thông qua tham số trật tự trạng thái ngưng tụ. Khi nhiệt độ đủ thấp và hằng số tương tác điện tử - phonon đủ lớn, tham số trật tự khác không, khi đó hệ ở trạng thái exciton ngưng tụ. Kết quả của chúng tôi khẳng định trạng thái exciton ngưng tụ có dạng BCS. Khi nhiệt độ tăng, tham số trật tự giảm và khi nhiệt độ đủ lớn, trạng thái kết hợp bị phá vỡ và hệ ở trạng thái plasma của điện tử và lỗ trống.

Từ khóa: trạng thái exciton ngưng tụ, mô hình điện tử hai dải năng lượng có tương tác điện tử - phonon, lý thuyết trường trung bình.

Abstract

Excitonic condensation state in the semimetal is addressed by considering the two-band model involving electron - phonon interaction. In the framework of the mean-field theory, the excitonic condensation state is specified from an order parameter. If the temperature is sufficiently low and the electron - phonon coupling is large enough, the order parameter is non-zero, the system is in the excitonic condensation state. Our results affirm that the excitonic condensation in the system is in the BCS-type. When the temperature increases, the order parameter decreases and if the temperature is sufficiently large, the thermal fluctuations deplete the coherent state and the system settles in a plasma state of unbound electrons and holes.

Keywords: excitonic condensation state, two-band model involving electron - phonon interaction, statics mean-field theory.

1. Mở đầu

Trạng thái exciton ngưng tụ là một trong những trạng thái lượng tử, đã và đang thu hút được sự quan tâm hàng đầu trong vật lý chất rắn đông đặc. Mặc dù được tiên đoán lý thuyết cách đây hàng nửa thế kỷ [1], tuy nhiên cho đến nay, những kết quả thực nghiệm thu được để chứng thực những trạng thái này vẫn còn hạn chế và các thí nghiệm minh chứng vẫn chưa thành công một cách thuyết phục. Trong những năm gần đây, việc tìm ra các vật liệu có triển vọng để quan sát trạng thái exciton ngưng tụ, như: dichalcogenide kim loại chuyển tiếp giả hai chiều 1T-TiSe₂, hợp chất đất hiếm chalcogenide TmSe_{0,45}Te_{0,55}, graphene hai lớp,... đã làm tăng những nghiên cứu về trạng thái exciton ngưng tụ, cả về phương diện lý thuyết và thực nghiệm.

Về mặt lý thuyết, trạng thái exciton ngưng tụ đã được nghiên cứu một cách kỹ lưỡng nhưng chủ yếu dựa trên những đặc tính hoàn toàn điện tử [2 - 4]. Khi đó, sự liên kết của các điện tử và lỗ trống với phonon không được kể tới. Trong khi đó, một số thí nghiệm gần đây trên vật liệu bán kim loại 1T-TiSe₂, đã cho thấy sự biến dạng mạng tinh thể là đáng kể và là cơ sở để hình thành trạng thái exciton ngưng tụ [5, 6]. Bên cạnh đó, trong vật liệu TmSe_{0,45}Te_{0,55}, tại áp suất thích hợp, một trạng thái liên kết của lỗ trống 4f ở điểm Γ và điện tử 5d tại điểm X có thể được tạo thành. Sự tương tác của điện tử/lỗ trống với phonon do đó cần phải hỗ trợ việc chuyển đổi phonon dạng Γ -X [7]. Tại nhiệt độ đủ thấp, những cặp điện tử - lỗ trống đó ngưng tụ trong trạng thái điện môi [7, 8]. Không có bất kỳ nghi ngờ gì nữa, biến dạng mạng hoặc các ảnh hưởng phonon là vô cùng quan trọng trong các loại vật liệu này, đặc biệt là trong việc hình thành trạng thái exciton ngưng tụ. Sự tương tác điện tử/lỗ trống - phonon do đó cần phải được xem xét kỹ lưỡng.

Trong thời gian gần đây, biến dạng mạng gây ra trạng thái exciton ngưng tụ đã thu hút được sự quan tâm của các nhà lý thuyết, tuy nhiên, chủ

yếu dừng lại ở trạng thái cơ bản, tức là, tại nhiệt độ không [9 - 11]. Nói chung, với một loại siêu lỏng, trạng thái exciton ngưng tụ có thể xuất hiện tại nhiệt độ hữu hạn. Ở nhiệt độ cao, nó có thể bị biến dạng bởi sự thăng giáng nhiệt. Nghiên cứu ảnh hưởng của nhiệt độ lên trạng thái ngưng tụ của cặp điện tử - lỗ trống do đó là cần thiết.

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu lý thuyết về sự hình thành trạng thái exciton ngưng tụ trong mô hình hai chiều hai dải năng lượng có tương tác điện tử - phonon bằng lý thuyết trường trung bình tĩnh. Trong đó, chúng tôi tập trung nghiên cứu ảnh hưởng của tương tác điện tử - phonon và nhiệt độ lên năng lượng tán sắc tái chuẩn hóa và bản chất của trạng thái exciton ngưng tụ trong hệ.

Bài báo được chia thành 4 phần. Trong đó, chúng tôi trình bày mô hình điện tử hai chiều hai dải năng lượng có tương tác điện tử - phonon và áp dụng lý thuyết trường trung bình tĩnh cho mô hình trong phần 2. Từ đó chúng tôi rút ra hệ phương trình tự hợp cho phép xác định tham số trật tự trạng thái ngưng tụ exciton và giải hệ phương trình tự hợp bằng phương pháp tính số. Phần 3 chúng tôi trình bày kết quả tính số và thảo luận. Cuối cùng, kết luận của bài báo được trình bày trong phần 4.

2. Mô hình và phương pháp lý thuyết

Để mô tả hệ điện tử - lỗ trống tương tác với phonon, chúng tôi sử dụng Hamiltonian sau:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad (1)$$

trong đó, \mathcal{H}_0 mô tả phần năng lượng không tương tác của hệ điện tử - lỗ trống - phonon

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}^e e_{\mathbf{k}}^\dagger e_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}^h h_{\mathbf{k}}^\dagger h_{\mathbf{k}} + \omega_0 \sum_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^\dagger b_{\mathbf{q}}, \quad (2)$$

và \mathcal{H}_{int} mô tả phần năng lượng tương tác điện tử - phonon

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{g}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \left[e_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger h_{\mathbf{k}}^\dagger (b_{\mathbf{q}}^\dagger + b_{\mathbf{q}}) + H.c. \right], \quad (3)$$

ở đây, $e_{\mathbf{k}}^\dagger (e_{\mathbf{k}})$, $h_{\mathbf{k}}^\dagger (h_{\mathbf{k}})$ và $b_{\mathbf{q}}^\dagger (b_{\mathbf{q}})$ tương ứng là các toán tử sinh (hủy) điện tử, lỗ trống có xung lượng \mathbf{k} và phonon xung lượng \mathbf{q} với năng lượng

ω_0 . Các hệ thức tán sắc cho điện tử e và lỗ trống h được cho bởi:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{e,h} = \varepsilon^{e,h} - t^{e,h} \gamma_{\mathbf{k}} - \mu, \quad (4)$$

với $\varepsilon^{e,h}$ là năng lượng tại nút của điện tử e và lỗ trống h ; $t^{e,h}$ là tích phân nhảy nút; $\gamma_{\mathbf{k}} = 2(\cos k_x + \cos k_y)$ trong hệ hai chiều hình vuông với hằng số mạng $a = 1$ và μ là thế hóa học. Trong phương trình (3), g là hằng số tương tác điện tử - phonon và N là số nút mạng tinh thể. Tại nhiệt độ đủ thấp, các exciton với xung lượng hữu hạn $\mathbf{Q} = (\pi, \pi)$ có thể ngưng tụ, được thể hiện bởi giá trị mật độ cặp điện tử - lỗ trống khác không. Đại lượng này đặc trưng cho sự lai hóa giữa điện tử và lỗ trống nên được xem là tham số trật tự trạng thái exciton ngưng tụ.

Trong gần đúng trường trung bình, khi số hạng thăng giáng được bỏ qua, Hamiltonian trong phương trình (1) dễ dàng được chéo hóa bằng phương pháp Bogoliubov [12] khi toán tử phonon mới được định nghĩa

$$B_{\mathbf{q}}^{\dagger} = b_{\mathbf{q}}^{\dagger} + \sqrt{N} \left(\frac{\chi}{\omega_0} \right) \delta_{\mathbf{q},\mathbf{Q}}. \quad (5)$$

Kết quả ta thu được hệ thức tán sắc giả hạt

$$E_{\mathbf{k}}^{1,2} = \frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}^h + \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^e}{2} \mp \frac{\text{sgn}(\varepsilon_{\mathbf{k}}^h - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^e)}{2} W_{\mathbf{k}}, \quad (6)$$

trong đó:

$$W_{\mathbf{k}} = \left[(\varepsilon_{\mathbf{k}}^h - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^e)^2 + 4|\Delta|^2 \right]^{1/2}, \quad (7)$$

với

$$\Delta = \frac{g}{\sqrt{N}} \langle b_{-\mathbf{Q}}^{\dagger} + b_{\mathbf{Q}} \rangle, \quad (8)$$

được xem như tham số trật tự trạng thái ngưng tụ exciton. Số hạng tỉ lệ với $\langle b_{-\mathbf{Q}}^{\dagger} + b_{\mathbf{Q}} \rangle$ cho ta sự biến dạng mạng khi có mặt của phonon trong hệ.

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \text{sgn}(\varepsilon_{\mathbf{k}}^h - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^e) \frac{(\varepsilon_{\mathbf{k}}^h - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^e)}{W_{\mathbf{k}}} \right], \quad (9)$$

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \text{sgn}(\varepsilon_{\mathbf{k}}^h - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^e) \frac{(\varepsilon_{\mathbf{k}}^h - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^e)}{W_{\mathbf{k}}} \right], \quad (10)$$

là các hệ số xuất hiện trong phép biến đổi Bogoliubov.

Cuối cùng, ta xác định được mật độ cặp điện tử - lỗ trống, được xem là tham số trật tự trạng thái exciton ngưng tụ

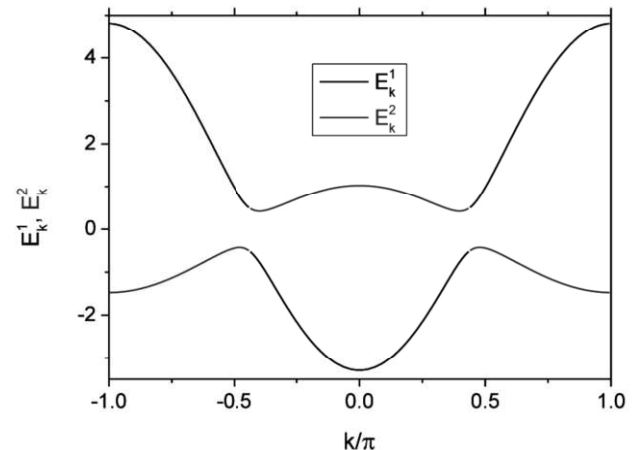
$$d_{\mathbf{k}} = -\text{sgn}(\varepsilon_{\mathbf{k}}^h - \varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{Q}}^e) \left[f(E_{\mathbf{k}}^1) - f(E_{\mathbf{k}}^2) \right] \frac{\Delta}{W_{\mathbf{k}}}, \quad (11)$$

với $f(E_{\mathbf{k}})$ là hàm phân bố Fermi-Dirac. Tham số trật tự khác không thể hiện hệ ở trạng thái exciton ngưng tụ.

Như vậy, từ các phương trình (5) - (7) và (10), ta thu được hệ phương trình tự hợp cho phép xác định tham số trật tự trạng thái exciton ngưng tụ ứng với mỗi thế hóa μ .

3. Kết quả tính số và thảo luận

Trong phần này, chúng tôi trình bày kết quả tính số để thảo luận ảnh hưởng của tương tác điện tử - phonon và nhiệt độ lên bản chất trạng thái ngưng tụ của cặp điện tử - lỗ trống trong mô hình. Trong bài toán này, để khảo sát chúng tôi chọn hệ hai chiều với $N = 150 \times 150$ nút mạng. Không giảm tính tổng quát, chúng tôi chọn $|t^c| = 1$ coi là đơn vị của năng lượng, $t^f = 0.3$ và cố định mức độ xen phủ của hai dải năng lượng điện tử e và lỗ trống h : $\varepsilon^e - \varepsilon^h = 1$ khi tần số phonon $\omega_0 = 0.5$. Chúng tôi quan tâm tới trạng thái lấp đầy một nửa, tức là tổng mật độ hạt điện tử và lỗ trống thỏa mãn $n^e + n^h = 1$. Thế hóa μ được thay đổi để thỏa mãn điều kiện này. Các kết quả tính toán được thực hiện trong hệ đơn vị năng lượng tổng quát với $\hbar = c = k_B = 1$.



Hình 1. Năng lượng giả hạt $E_{\mathbf{k}}^1$ (đường màu đen) và $E_{\mathbf{k}}^2$ (đường màu đỏ) dọc theo trục (k, k) trong vùng Brillouin thứ nhất ở trạng thái cơ bản với $g=0.5$.

Hình 1 biểu thị các dải năng lượng giả hạt trong trạng thái cơ bản khi hằng số tương tác điện tử - phonon $g = 0.5$. Trong bài toán này, chúng ta xét hệ ở trạng thái bán kim loại khi không có tương tác, hai dải điện tử và lỗ trống xen phủ nhau, mặt Fermi thường lớn và cả điện tử và lỗ trống đều tham gia vào hình thành bề mặt Fermi. Trạng thái ngưng tụ exciton được thể hiện bởi sự xuất hiện của khe năng lượng tại mức Fermi. Với $g = 0.5$, tương tác điện tử - phonon đã đủ lớn để khe năng lượng hình thành tại mức Fermi, dẫn tới hình thành trạng thái liên kết của các cặp điện tử - lỗ trống. Đặc tính này làm sáng tỏ những quan sát thực nghiệm trong vật liệu $\text{TmSe}_{0.45}\text{Te}_{0.55}$ ở áp suất lớn, khi mà hai dải $4f$ và $5d$ chồng lên nhau. Do sự tán xạ phonon mà lỗ trống $4f$ kết cặp với điện tử $5d$ để tạo thành exciton. Các exciton này ngưng tụ khi nhiệt độ đủ thấp [13]. Bức tranh này hoàn toàn tương tự với bức tranh ngưng tụ của cặp điện tử - điện tử với spin trái chiều trong lý thuyết BCS của siêu dẫn [14]. Do sự ghép cặp của cặp điện tử - điện tử với spin trái chiều (cặp Cooper) mà khe năng lượng hình thành xung quanh mức Fermi với bề rộng khe tỉ lệ với tần số Debye. Trạng thái ngưng tụ này sẽ bị phá vỡ nếu có năng lượng đủ lớn phá hủy trạng thái kết cặp, khi đó khe năng lượng cũng không còn, hệ chuyển sang trạng thái plasma của điện tử và lỗ trống.

Để hiểu rõ hơn bản chất trạng thái ngưng tụ của cặp điện tử - lỗ trống trong mô hình phụ thuộc vào cường độ tương tác điện tử - phonon và nhiệt độ, dưới đây chúng tôi mô tả sự phụ thuộc của tham số trật tự trạng thái exciton ngưng tụ vào xung lượng và nhiệt độ hoặc hằng số tương tác điện tử - phonon. Hệ ở trạng thái ngưng tụ khi tham số trật tự khác không, và ngược lại, khi tham số trật tự bằng không thì hệ ổn định trong trạng thái plasma của điện tử và lỗ trống. Trên Hình 2 bên trái, chúng tôi biểu thị tham số trật tự trạng thái exciton ngưng tụ $d_{\mathbf{k}}$ phụ thuộc vào nhiệt độ T ứng với một vài giá trị của hằng số tương tác điện tử - phonon g trong vùng Brillouin thứ nhất. Kết quả thể hiện vùng không gian xung lượng trong đó các điện tử e và lỗ trống h có liên quan đến sự hình thành cặp điện tử - lỗ trống và quá trình ngưng tụ.

Rõ ràng là $d_{\mathbf{k}}$ biến mất với mọi \mathbf{k} khi hệ ở nhiệt độ trên nhiệt độ tới hạn T_c . Do đó T_c được gọi là nhiệt độ chuyển pha trạng thái exciton ngưng tụ. Tại và ngay dưới nhiệt độ tới hạn, $d_{\mathbf{k}}$ chỉ có giá trị hữu hạn tại các xung lượng xung quanh xung lượng Fermi \mathbf{k}_F . Hình 2a cho thấy khi g nhỏ, chẳng hạn $g = 0.2$, tham số trật tự $d_{\mathbf{k}}$ rất nhỏ và hệ xem như đồng nhất. Tuy nhiên, khi tăng lên $g = 0.4$ thì $d_{\mathbf{k}}$ tăng mạnh, đặc biệt tại các xung lượng gần xung lượng Fermi (Hình 2b). Tham số trật tự giảm mạnh tại các xung lượng nằm ngoài xung lượng Fermi. Điều này khẳng định chỉ những điện tử nằm xung quanh mức Fermi mới tham gia vào quá trình ghép cặp hình thành exciton, mức Fermi đóng vai trò quan trọng quyết định trạng thái ngưng tụ của exciton. Bức tranh này hoàn toàn giống với bức tranh siêu dẫn thường được mô tả bằng lý thuyết BCS (chỉ những điện tử với spin trái chiều xung quanh mức năng lượng Fermi mới đóng vai trò ghép cặp Cooper). Vì vậy, trong trường hợp này người ta thường nói trạng thái ngưng tụ của exciton có dạng BCS. Tăng cường độ tương tác tới $g = 0.5$, ta nhận thấy tham số trật tự vẫn có giá trị cực đại tại các xung lượng quanh xung lượng Fermi (Hình 2c). Kết quả cũng cho thấy nhiệt độ tới hạn cho chuyển pha trạng thái exciton ngưng tụ T_c càng cao khi hằng số tương tác điện tử - phonon càng lớn. Khi nhiệt độ cao hơn nhiệt độ chuyển pha trạng thái ngưng tụ, tham số trật tự trở nên rất nhỏ, ngay cả tại xung lượng Fermi. Hệ vì thế ở trạng thái đồng nhất, phi trật tự.

Hình 2 bên phải cho thấy sự phụ thuộc xung lượng và hằng số tương tác điện tử - phonon của tham số trật tự $d_{\mathbf{k}}$ trong vùng Brillouin thứ nhất ở các nhiệt độ khác nhau. Rõ ràng là $d_{\mathbf{k}}$ chỉ khác không, thể hiện hệ tồn tại trong trạng thái exciton ngưng tụ khi hằng số tương tác điện tử - phonon lớn hơn một giá trị tới hạn g_c . Thật vậy, Hình 2d cho thấy tại nhiệt độ không, khi hằng số tương tác điện tử - phonon lớn hơn giá trị tới hạn $g_c \approx 0.23$ thì $d_{\mathbf{k}}$ luôn có giá trị cực đại tại các xung lượng gần xung lượng Fermi. Tham số trật tự giảm mạnh tại các xung lượng nằm ngoài xung lượng Fermi. Tuy nhiên, với g lớn, ngoài giá trị xung lượng Fermi, các trạng thái ghép cặp điện tử - lỗ trống vẫn xảy

ra với đóng góp đáng kể. Thậm chí tại tâm hay biên vùng Brillouin, tham số trật tự hay mật độ cặp điện tử - lỗ trống vẫn tồn tại. Mặc dù vậy, ta vẫn khẳng định các exciton trong trường hợp này ngưng tụ trong trạng thái dạng BCS. Kết quả này hoàn toàn phù hợp với trường hợp một chiều đã được nghiên cứu kỹ lưỡng trong tài liệu [11]. Khi tăng nhiệt độ, Hình 2e và Hình 2f, thì giá trị tới hạn của hằng số tương tác điện tử - phonon g_c tăng lên, do đó vùng ngưng tụ exciton bị thu hẹp lại. Ở nhiệt độ thấp, bề mặt Fermi rõ ràng đóng một vai trò quan trọng để hình thành trạng thái liên kết điện tử - lỗ trống, chỉ ra loại ngưng tụ dạng BCS điển hình của trạng thái EI ổn định [2, 15].

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã khảo sát ảnh hưởng của nhiệt độ và phonon lên trạng thái exciton ngưng tụ trong hệ bán hai chiều thông qua áp dụng lý thuyết trường trung bình tĩnh cho mô hình hai chiều hai dải năng lượng có tương tác điện tử - phonon. Trong đó, chúng tôi đã rút ra hệ phương trình tự hợp cho phép xác định các tham số trật tự trạng thái exciton ngưng tụ của mô hình. Giải hệ phương trình tự hợp bằng phương pháp tính số, kết quả tính số cho thấy, khi tương tác điện tử - phonon đủ lớn, khe năng lượng hình thành xung quanh mức Fermi và hệ ổn định trong trạng thái exciton ngưng tụ tại nhiệt độ thấp. Tham số trật tự có giá trị cực đại tại các xung lượng gần xung lượng Fermi. Mặt Fermi đóng vai trò quan trọng trong việc liên kết cặp điện tử - lỗ trống hình thành exciton và trạng thái ngưng tụ. Do vậy, chúng tôi khẳng định trong trường hợp này, trạng thái ngưng tụ của exciton có dạng BCS. Khi tương tác điện tử - phonon nhỏ, hệ ở trong trạng thái bán kim loại. Còn khi nhiệt độ cao hơn nhiệt độ tới hạn thì trạng thái liên kết của cặp điện tử - lỗ trống bị phá hủy hoàn toàn bởi sự thăng giáng nhiệt, do vậy hệ chuyển sang trạng thái plasma của điện tử và lỗ trống. Xem xét sự cạnh tranh của trạng thái ngưng tụ exciton và trạng thái sóng mật độ điện tích trong mô hình sẽ là những nghiên cứu tiếp theo của chúng tôi trong tương lai.

Tài liệu tham khảo

- [1] N. F. Mott. The transition to the metallic state. *Philos. Mag.*, 6:287, 1961.
- [2] N. V. Phan, K. W. Becker, and H. Fehske. Spectral signatures of the BCS-BEC crossover in the excitonic insulator phase of the extended Falicov-Kimball model. *Phys. Rev. B*, 81:205117, 2010.
- [3] B. Zenker, D. Ihle, F. X. Bronold, and H. Fehske. Electron-hole pair condensation at the semimetal-semiconductor transition: A BCS-BEC crossover scenario. *Phys. Rev. B*, 85:121102(R), 2012.
- [4] C. D. Batista. Electronic Ferroelectricity in the Falicov-Kimball Model. *Phys.Rev. Lett.*, 89:166403, 2002.
- [5] F. J. Di Salvo, D. E. Moncton, and J. V. Waszczak. Electronic properties and superlattice formation in the semimetal TiSe₂. *Phys. Rev. B*, 14:4321, 1976.
- [6] C. Monney, E. F. Schwier, M. G. Garnier, N. Mariotti, C. Didiot, H. Beck, P. Aebi, C. Cercellier, J. Marcus, C. Battaglia, H. Berger, and A. N. Titov. Temperature-dependent photoemission on 1T-TiSe₂: Interpretation within the exciton condensate phase model. *Phys. Rev. B*, 81:155104, 2010.
- [7] P. Wachter, B. Bucher, and J. Malar. Possibility of a superfluid phase in a Bose condensed excitonic state. *Phys. Rev. B*, 69:094502, 2004.
- [8] P. Farkasovský. Hartree-Fock study of electronic ferroelectricity in the Falicov-Kimball model with f - f hopping. *Phys. Rev. B*, 77:155130, 2008.
- [9] T. Kaneko, T. Toriyama, T. Konishi, and Y. Ohta. Orthorhombic-to-monoclinic phase transition of Ta₂NiSe₅ induced by the Bose-Einstein condensation of excitons. *Phys. Rev. B*, 87:035121, 2013.
- [10] B. Zenker, H. Fehske, H. Beck, C. Monney, and A. R. Bishop. Chiral charge order in 1T-TiSe₂: Importance of lattice degrees of freedom. *Phys. Rev. B*, 88:075138, 2013.
- [11] V.-N. Phan, K. W. Becker, and H. Fehske. Exciton condensation due to electron-phonon interaction. *Phys. Rev. B*, 88:205123, 2013.
- [12] N. Bogoliubov, V. V. Tolmachev, and D. V. Shirkov. *New Method in the Theory of Superconductivity*. Consultants Bureau, New York, 1959.
- [13] P. Wachter. Exciton condensation in an intermediate valence compound: TmSe_{0.45}Te_{0.55}. *Solid State Commun.*, 118:645, 2001.
- [14] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. Theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 108:1175, 1957.
- [15] N. V. Phan, H. Fehske, and K. W. Becker. Excitonic resonances in the 2D extended Falicov-Kimball model. *Europhys. Lett.*, 95:17006, 2011.